

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Ricardo Jorge DOS ANJOS LIMA

PROPRIETES DE STABILITE DANS LES SYSTEMES
QUANTIQUES SUR UN RESEAU

Soutenue, le 24 juin 1974, devant la Commission d'Examen

JURY :

MM. J. MANUCEAU

Président

S. DOPLICHER

G. GALLAVOTTI

J. GINIBRE

D. KASTLER

Mme M. SIRUGUE-COLLIN

M. D. TESTARD

Examineurs

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Ricardo Jorge DOS ANJOS LIMA

PROPRIETES DE STABILITE DANS LES SYSTEMES
QUANTIQUES SUR UN RESEAU

Soutenue, le 24 juin 1974, devant la Commission d'Examen

JURY :

MM. J. MANUCEAU

Président

S. DOPLICHER

G. GALLAVOTTI

J. GINIBRE

D. KASTLER

Mme M. SIRUGUE-COLLIN

M. D. TESTARD

Examineurs



Permis d'imprimer : le 10 juin 1974
à Marseille.

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM. BIZOUARD Michel	Physique
BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM. BODIOU Georges	Mathématiques appliquées
BODOT Aubert	Chimie
BONNEAU Marcel	Mathématiques
CADILHAC Michel	Physique
CARPENI Georges	Chimie
CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mlle CLARION Claire	Mécanique des Fluides
MM. DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
DOUCET Yves	Physique
FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
FEHRENBACH Charles	Astronomie
FOURES Léonce	Mathématiques
FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM. GIRARDIE Adrien	Zoologie
GOUVERNET Claude	Géologie appliquée
HERVE Jacques	Electronique
HUGON Maurice	Psycho-physiologie
JULG André	Chimie théorique
LAFFITTE Marc	Chimie
MALE Damien	Physique
MANDELBROJT Jacques	Physique
MARCHIS-MOUREN Guy	Chimie biologique
MERICOUX Roger	Physique industrielle
NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
NEGRE Robert	Biologie végétale
SIMON Claude	Physiologie animale
SOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
Mme TAXY Suzanne	Géologie historique
MM. VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
VISCONTI Antoine	Physique théorique

Professeurs sans chaire

MM. BOREL Fernand
BOUDET Roger
Mlle CATZIGRAS France
Mlle CHANDEBOIS Rosine
M. COMBET Serge
Mme DELACHE Solange
MM. FEUGEAS Claude
FOUGEREAU Michel
GILLET André
GUENOCHÉ Henri
GUERMEUR Robert
HALBWACHS Francis
HENNEQUIN Jacques
MANUCEAU Jérôme
MERDY Henri
Mlle PICHENOT Mathilde
M. SARDA Louis
Mme SIRUGUE Madeleine
M. TACHOIRE Henri

Techniques mathématiques de la physique
Mathématiques
Géologie historique
Biologie animale
Chimie
Mathématiques
Chimie
Biochimie
Mathématiques
Mathématiques appliquées
Physique
Physique
Electronique
Mathématiques
Physique
Biologie végétale
Biochimie
Physique
Chimie

Maîtres de conférences

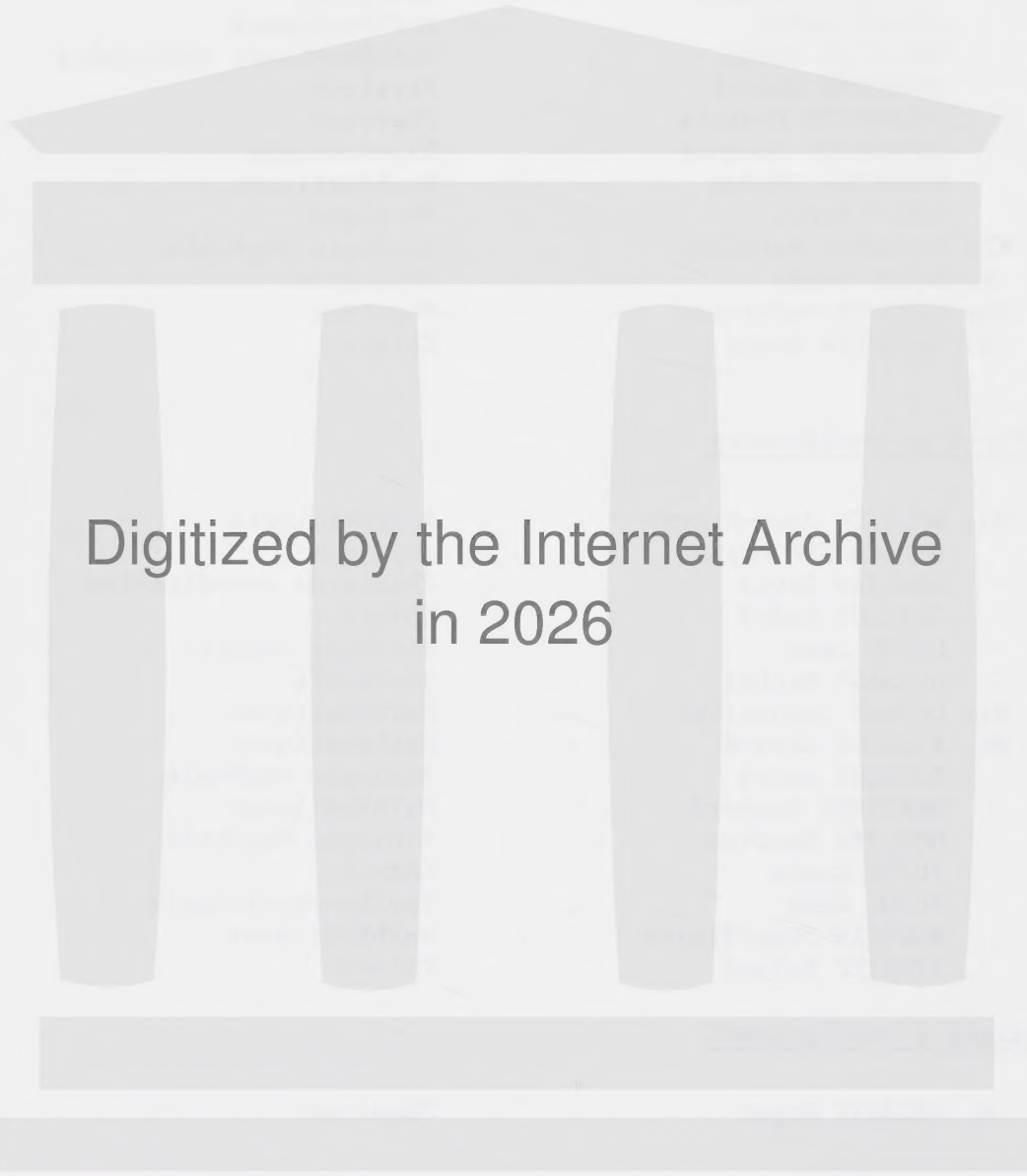
MM. BELAICH Jean-Pierre
BENARROCHE Marcel
BENLIAN David
CASALOT André
CRESP Jean
DELAAGE Michel
Mlle DETRAZ Jacqueline
MM. FARDOUX Gérard
LAVAGNE André
MARTINET Bernard
MOULINS Maurice
PUJOL Louis
PUJOL Rémy
SOUBLIN Jean-Pierre
STREIFF Roland

Microbiologie
Physique
Chimie de coordination
Chimie
Biologie animale
Biochimie
Mathématiques
Mathématiques
Biologie végétale
Mathématiques
Biologie végétale
Chimie
Psycho-physiologie
Mathématiques
Chimie

Chargés d'enseignement

M. DELEUIL Roger

Physique



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0023

[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]

AO
POVO · UNIDO
QUE JAMAIS SERA VENCIDO

Marseille, le 14 juin 1974

Mon cher Lecteur,

Je pense devoir à l'esprit d'équipe existant parmi les travailleurs du Centre de Physique Théorique la possibilité d'avoir accompli ce travail. Sans l'existence de ces équipes de recherche, dotées de possibilités de contacts fructueux, aucune recherche ne peut se créer à l'heure actuelle.

La liste nominale des personnes que j'aimerais remercier serait si longue que son intérêt en sortirait particulièrement affadi.

Je me permets tout juste d'en extraire un sous-ensemble maigre (de première catégorie, cependant, [1]§7.1) : D. Kastler, D.W. Robinson pour leur aide à mes premiers pas dans ce terrain glissant qui est le début d'un travail de recherche, aide aussi dans les virages dangereux. J. Manuceau et D. Testard dont les connaisseurs retrouveront des traces innombrables dans ce, et d'autres, travaux. J. Ginibre dont je ne sais si je dois remercier surtout son apport scientifique tout le long de mon travail de chercheur ou l'amitié qui s'est développée pendant ce temps. Permettez-moi d'opter pour la deuxième alternative en cette page, l'apport scientifique étant bien patent dans toutes les pages qui suivent. S. Doplicher et G. Gallavotti ont dépensé bien de l'énergie pour me rendre plus claires quelques idées développées dans la suite. Avec Mme M. Sirugue-Collin, je remercie encore les personnes déjà citées d'avoir accepté de participer au Jury de cette Thèse. Je ne veux pas oublier Iu. M. Soukov ; son intérêt pour ce travail m'a permis d'avancer dans son élaboration.

Une partie de ce travail est due à une collaboration avec A. Verbeure, J. Naudts et S. Miracle-Sole dont l'amitié qui nous lie m'empêche de dire publiquement tout le bien que j'en pense.

Avec tout le Secrétariat du Centre de Physique Théorique, je remercie, pour l'excellent travail de frappe et édition, Mlle D. Dadoun, devenue Mme Roche à l'heure de cette Thèse, à qui, de plus, je souhaite un grand bonheur ainsi que le nombre d'enfants désirés.

R.L.

[1] G. CHOQUET
Functional Analysis I,
W.A. Benjamin, Inc. (1969).

TABLE DES MATIERES

=====

<u>PARTIE I</u>	: INTRODUCTION	I.1
<u>PARTIE II</u>	: APPROCHE A L'EQUILIBRE	
	Local Perturbations and Approach to Equilibrium	II.1
<u>PARTIE III</u>	: GEOMETRIE DES SIMPLEXES	
	Références brèves à la structure des simplexes	III.1
	Invariant Faces of a Simplex	III.19
	Compléments	III 35
<u>PARTIE IV</u>	: BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE	
	Introduction	IV.1
	Spontaneous Symetry Breakdown for Quantum Lattice Systems	IV.11
<u>PARTIE V</u>	: UNE BORNE DE LA COMPRESSIBILITE	
	Existence of a Lower Bound of the Compressibility in Quantum Lattice Gases	V.1

P A R T I E I

INTRODUCTION

=====

1.1 Dans le cadre de ce travail nous abordons deux types de propriétés liées à la stabilité des états d'équilibre. Bien que les résultats obtenus soient de nature indépendante du modèle considéré, comme nous l'indiquons plus tard, nous traiterons essentiellement le cas du modèle quantique sur un réseau.

Les systèmes quantiques sur un réseau ont été étudiés en détail dans les travaux de D.W. Robinson [1], [2], et D.W. Robinson en collaboration avec O. Lanford III, [3]. Ces auteurs ont introduit le formalisme mathématique adéquat au modèle, à savoir une C^* -algèbre $\mathcal{U}$ quasi-locale, dont les sous- C^* -algèbres locales sont indexées par l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^d$. Cette algèbre d'opérateurs agit sur un espace d'Hilbert qui est le produit tensoriel de copies d'un espace à 2 dimensions, indexées par les points du réseau $\mathbb{Z}^d$. Les états du système sont alors les formes linéaires positives normées de l'algèbre quasi-locale,

L'idée de définir des états d'équilibre du système à l'aide d'un principe variationnel avait été introduite par D. Ruelle dans [4] pour les systèmes classiques en mécanique statistique. Ces états réalisaient le supremum dans une équation reliant la pression thermodynamique, l'entropie et l'énergie moyenne. Dans [5], G. Gallavotti et S. Miracle-Sole démontraient que l'ensemble des interactions pour lesquelles il existe un seul état d'équilibre ainsi défini, est dense dans l'ensemble des interactions (muni d'une norme définie par la suite) pour presque toute température inverse β .

Dans [1], l'auteur, après avoir étudié la pression thermodynamique dans le cas quantique, défini une entropie sur l'ensemble des états périodiques sur le réseau, ainsi qu'une énergie moyenne. Ceci lui permet de démontrer un principe variationnel comme celui de [4].

Dans [2], D.W. Robinson démontre que les états invariants par translation et qui réalisent l'équilibre pour une certaine classe d'interactions invariantes vérifient la condition K.M.S.

Nous avons montré, [5], [6], l'équivalence du problème variationnel dans les trois "ensembles" de Gibbs (grand canonique, canonique et microcanonique) et conclu à l'identification de l'entropie microcanonique avec l'entropie définie dans [1] pour les états d'équilibre invariants par translation.

Mais, dans ce cas, il avait été impossible de traiter les états d'équilibre non invariants par translation. Ceci était dû à l'absence de définition de l'entropie pour un état d'équilibre quelconque (non périodique).

Il faut noter, [1] p.155, que les théorèmes démontrés dans le cadre précédent n'excluent pas la possibilité d'existence d'une brisure de symétrie de translation.

L'introduction de la condition de Kubo-Martin-Schwinger permet de définir l'ensemble des états d'équilibre sans référence à l'invariance de translation.

De plus, un résultat récent de R. Haag, D. Kastler et E. Trych-Pohlmeyer [7], montre qu'un état stationnaire (i.e. invariant pour l'évolution du temps), stable pour les perturbations locales de la dynamique et ayant une décroissance convenable des fonctions de corrélation est K.M.S. (ou alors le spectre de l'énergie dans la représentation associée à l'état est dans une demi-droite réelle). Ceci justifie l'utilisation de la condition K.M.S. comme définissant l'équilibre pour les systèmes infinis.

Notons que, comme dans les parties III et IV de ce travail, nous ne faisons intervenir que les propriétés de structure géométrique, les résultats restent valables, mutatis mutandis, pour l'ensemble des états d'équilibre défini à l'aide des équations de Dobrushin-Ruelle-Lanford pour les systèmes classiques sur un réseau.

1.2 Dans la partie II de ce travail nous examinons un problème de stabilité des états d'équilibre pour certains systèmes infinis sur un réseau quand ils sont soumis à une perturbation locale (ou quasi-locale de type particulier).

Dans [8], O.E. Lanford III et D.W. Robinson étudient l'approche à l'équilibre des états d'un gaz de Fermi, invariants par translation et dont l'évolution dans le temps est l'évolution libre. Ces auteurs montrent que, si les fonctions de corrélation de tels états sont de carré intégrable, alors le système se comporte asymptotiquement comme un état quasi-libre d'équilibre.

Dans [9], D.B. Abraham, E. Barouch, G. Gallavotti et A. Martin-Löf étudient l'approche à l'équilibre dans le cas du modèle X-Y, perturbé localement. Ces auteurs observent l'évolution de la valeur moyenne du moment magnétique dans la direction de l'axe des z et concluent à une approche comme t^{-2} lorsque le système est évolué suivant l'automorphisme non perturbé.

Pour un système de fermions sur un réseau, perturbé localement, nous étudions, comme dans [9], le comportement asymptotique des systèmes en évolution.

Nous donnons des exemples de systèmes qui approchent l'équilibre avec des vitesses variables.

D'une façon complémentaire, nous avons observé que la rapidité du retour à l'équilibre dépendant aussi de l'observation qui était faite (densité, moment magnétique, etc.)

Nous utilisons, en partie, une technique utilisée plus tard par H. Araki dans [10], dans un cadre plus général.

Si nous désignons par ρ l'état du système perturbé ou correspondant à l'hamiltonien $H_0 + V$ (où V est la perturbation) et si l'évolution obtenue à partir de l'hamiltonien non perturbé est désignée par α_t^0 , $t \in \mathbb{R}$, alors pour chaque observable A nous pourrions trouver F , tel que :

$$|\rho \alpha_t^0(A) - \rho(A)| \leq F(\rho, V, A, t) \quad (1.1)$$

En fait cette fonction F ne dépend pas de V et nous obtenons des fonctions du type

$$F(\rho, V, A, t) = \text{Const} \times \left(\frac{1}{|t|^{1/2}} \right)^{N(A)} \quad (1.2)$$

ou encore

$$F(\rho, V, A, t) = \text{Const} \times \left(\frac{1}{|t|^K} \right)^{N(A)} \quad (1.3)$$

où $N(A)$ est un entier qui ne dépend que de la forme algébrique de l'observable A et K est un entier dépendant de ρ et par conséquence de H_0 .

Le calcul de la constante K se fait en utilisant une fonction complexe obtenue par développement de Fourier dont les coefficients

sont les constantes de couplage apparaissant dans l'hamiltonien du système.

Nous donnons aussi, en application, le calcul effectif de la fonction (1.2) dans le cas du modèle X-Y, i.e. un modèle ayant comme hamiltonien local

$$H_N = \sum_{j=-N}^N J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \mu h \sigma_j^z$$

dans lequel $\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$ sont les matrices de Pauli.

1.3 Dans les parties III et IV nous étudions les propriétés géométriques de l'ensemble des états d'équilibre d'un système quantique sur un réseau. Le problème que nous nous sommes posé est celui des conséquences de l'existence d'une brisure spontanée de symétrie.

L'absence de symétrie brisée peut être aussi interprétée comme une propriété de stabilité par rapport au groupe de symétrie considéré.

Dans ce cas, on s'attend à ce que, sous l'effet d'une petite perturbation, le système quitte un état d'équilibre ayant une symétrie supérieure, mais de telle façon que le nouvel état d'équilibre possède la même symétrie.

Dans la situation où, au contraire, il y a une brisure spontanée de symétrie, le système se trouve, après une petite perturbation, dans un état ayant une symétrie inférieure à la symétrie initiale.

Dans le modèle d'Ising à trois dimensions ferromagnétique, Dobrushin

[11] a montré l'existence d'états d'équilibre non invariants par translation dans ce modèle. Or, on savait (voir par ex. [12]) que les états $\mathbb{Z}^3$ -ergodiques dans ce modèle sont extrémaux dans l'ensemble des états d'équilibre (à température fixée), d'où l'absence de brisure de symétrie de translation.

Par contre, il est évident que l'état $\frac{1}{2} (\sigma^+ + \sigma^-)$ est une combinaison convexe d'états non invariants par le groupe $\mathbb{Z}^3 \times \uparrow \downarrow$ d'où l'existence d'une brisure de symétrie par rapport à ce groupe.

Dans [13], D. Ruelle étudie aussi le problème de la brisure spontanée de symétrie dans les modèles classiques sur un réseau. L'auteur démontre un théorème qui caractérise le fait que le seul état invariant par translation soit extrémal parmi les états d'équilibre. Ce résultat est utilisé ensuite pour démontrer l'unicité de l'état d'équilibre dans le modèle d'Ising ferromagnétique si le champ magnétique est différent de zéro.

D'un point de vue géométrique, la brisure spontanée de symétrie se traduit par la possibilité de décomposer un état invariant par rapport à un certain groupe de symétrie en combinaison convexe propre d'états ayant une symétrie inférieure.

L'étude géométrique et analytique des faces d'ensembles convexes, et plus particulièrement des simplexes, est relativement récente. Nous rappelons qu'un sous-ensemble F d'un ensemble convexe K dans un espace vectoriel topologique est une face si $x \in F$ et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $x_1, x_2 \in K$, $\lambda \in [0, 1]$ entraînent $x_1, x_2 \in F$.

Les premiers résultats dans ce domaine ont été obtenus par E.M. Alfsen en 1964 et 1965 ([14], [15]). Dans ces articles on retrouve déjà le point de départ pour la suite de l'étude géométrique des simplexes, à savoir le théorème de décomposition d'un simplexe en une face fermée et sa face supplémentaire.

Ce théorème assure la décomposition de tout point x du simplexe en une combinaison linéaire convexe unique

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

avec x_1 et x_2 dans les faces supplémentaires.

C'est de la même période que date le théorème de séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de D.A. Edwards, [16]. Et c'est à l'aide de ce théorème que M. Rogalsky a donné une version analytique du Théorème de Alfsen auquel il ajoute des résultats importants sur les propriétés topologiques de la face supplémentaire d'une face fermée dans un simplexe, [17].

Ce dernier travail va nous permettre de démontrer un théorème de symétrie ponctuelle pour les états d'équilibre.

Parmi les simplexes (de Choquet) étudiés en détail figurent les simplexes de Bauer, c'est-à-dire les simplexes pour lesquels l'ensemble des points extrémaux est fermé. Dans ce cas le simplexe est isomorphe, par une bijection affine continue, à l'ensemble des mesures de Radon positives et de masse 1 sur un espace topologique compact. Réciproquement, un tel ensemble de mesures est clairement un simplexe de Bauer.

L'étude de la géométrie de ces simplexes est facilitée par un théorème dû à E. Størmer, [18], qui caractérise les simplexes de Bauer comme étant ceux pour lesquels la fermeture de toute face est encore une face. Dès lors, les faces fermées d'un simplexe de Bauer K sont exactement les ensembles F de la forme :

$$F = \overline{\text{conv}} B, \quad B \subset \mathcal{E}(K) \quad (1.5)$$

où $\overline{\text{conv}}$ désigne la fermeture de l'enveloppe convexe et $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K .

L'idée qui revient plusieurs fois dans la troisième partie de ce travail est de réduire l'étude géométrique de la symétrie d'un ensemble convexe compact K à celui de la symétrie du simplexe de Bauer constitué par les mesures de probabilité (de Radon) à support dans K . Ceci se fera dans deux cas différents : K étant un ensemble convexe compact quelconque et K , étant plus particulièrement, un simplexe (de Choquet).

Nous montrons avec un exemple que, dans le premier cas, il n'est pas suffisant, pour assurer la non brisure de symétrie, que les mesures de probabilité invariantes (par l'action biduale de G) forment une face dans l'ensemble des mesures de probabilité sur K ; alors que cette condition naturelle est suffisante dans le cas où K est un simplexe.

En vue d'obtenir des propriétés qui relient la brisure spontanée de symétrie aux observations moyennes des différentes observables dans tous les états d'équilibre à même température nous avons étudié les propriétés décrites plus haut dans l'ensemble des mesures de probabilité à support dans la fermeture de chaque orbite de G dans K .

Ici intervient une autre idée de cette troisième partie et qui consiste à construire les mesures de probabilité à support dans les fermetures d'orbites comme moyennes (i.e., états sur la C^* -algèbre commutative des fonctions bornées continues sur le groupe G). En outre, nous établissons une relation entre les moyennes invariantes et les mesures invariantes.

Ceci nous amène à introduire la notion de fonction (et de point par la suite) oscillant lentement à l'infini par rapport à toute moyenne invariante (m -slowly oscillating). Nous montrons que cette notion contient celle de suite oscillant lentement dans le cas particulier de $G = \mathbb{Z}$, notion introduite dans l'étude des

des propriétés taubériennes des suites numériques (voir [21]) ("slowly oscillating sequence").

Utilisant les techniques de représentation de C^* -algèbre, nous pouvons alors revenir au problème initial et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des points fixes K_G soit une face de K .

Au passage nous aurons donné quelques résultats nouveaux concernant la structure géométrique des simplexes de Bauer qui se transforment par action d'un groupe G localement compact et moyennable.

Ceci permet de constater l'intérêt de la notion d'oscillation lente à l'infini par rapport aux moyennes invariantes dans l'étude des propriétés géométriques des simplexes (de Choquet).

1.4 Dans la partie IV, nous appliquons les résultats mathématiques de la partie III au cas de l'absence de brisure spontanée de symétrie dans les modèles quantiques sur un réseau.

Nous montrons que cette propriété est équivalente à un écart quadratique en moyenne qui est nul entre tout état d'équilibre et un état invariant par translation.

Comme dans le cas classique, il fallait trouver un ensemble d'interactions qui sépare en énergie les états d'équilibre. L'ensemble d'interactions uniformément moyennables joue justement ce rôle.

A l'aide de cet ensemble nous montrons aussi l'égalité des énergies moyennes des états dans le cas où il n'y a pas de brisure spontanée de symétrie.

Au passage nous avons démontré l'équivalence de la notion de limite au sens de van Hove (voir par ex. [19] et de la limite au sens de la condition de Følner [20]. Ceci permet d'étendre la notion de limite de van Hove aux groupes moyennables.

1.5 Dans la dernière partie, nous démontrons l'existence d'une borne inférieure pour la compressibilité dans les systèmes quantiques sur un réseau.

- REFERENCES I -

- [1] D.W. ROBINSON
Commun. Math. Phys., 6, 151 (1967).
- [2] D.W. ROBINSON
Commun. Math. Phys., 7, 337 (1968).
- [3] O.E. LANFORD III, D.W. ROBINSON
Commun. Math. Phys., 9, 327 (1968)
- [4] D. RUELLE
On the use of "small external fields" in the problem
of symmetry breakdown in statistical mechanics ;
Ann. of Phys., 69, 364 (1972).
- [5] R. LIMA
Equivalence of ensembles in quantum lattice systems;
Ann. Inst. H. Poincaré, 5, 324 (1971).
- [6] R. LIMA
Equivalence of ensembles in quantum lattice systems;
states
Commun. Math. Phys., 24, 180 (1972).
- [7] R. HAAG, D. KASTLER, E. TRYCH-POHLMAYER
Stability and equilibrium states,
Preprint (1974).
- [8] O.E. LANFORD III, D.W. ROBINSON
Approach to equilibrium of free quantum systems;
Commun. Math. Phys., 24, 193-210 (1972).
- [9] D.B. ABRAHAM, E. BAROUCH, G. GALLAVOTTI, A. MARTIN-LÖF
Phys. Rev. Lett., 25, 1449 (1970).
- [10] H. ARAKI
Relative Hamiltonian for faithful normal states of
von Neumann algebras,
Publ. RIMS, 9, n° 1 (1973).

- [11] R.L. DOBRUSHIN
The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity;
Teor. Verojatnost i Primenev, 13, (1968).
- [12] C.M. FORTUIN, J. GINIBRE, P.W. KASTELEYN
Commun. Math. Phys., 22, 89 (1971).
- [13] D. RUELE
On the use of "small external fields" in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics;
Annals of Physics, 69, 2 (1972).
- [14] Erik M. ALFSEN
On the geometry of Choquet simplexes;
Math. Scand., 15, p.97-110 (1964).
- [15] Erik M. ALFSEN
On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces,
Math. Scand., 17, p.169-176 (1965).
- [16] D.A. EDWARDS
Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet;
C.R. Acad. Sci. Paris, 261, p.365-371 (1965).
- [17] M. ROGALSKI
Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée et application à un théorème de AlfSEN ; quotient par une relation d'équivalence;
Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel), 12ème année, 1967/68, n°2.
- [18] E. STØRMER
On partially ordered vector spaces and their duals with applications to simplexes and C^* -algebras.
Proc. London Math. Soc. (3), 18, 245-265 (1968).
- [19] D. RUELE
Statistical mechanics - Rigorous results;
Benjamin (1969).
- [20] E. FØLNER
On the group with full Banach mean value;
Math. Scand., 3, 243-254 (1955).
- [21] A. PEYERIMHOFF
Lectures on Summability;
Lectures notes in Mathematics, n° 107 - Springer-Verlag.

PARTIE II

APPROCHE A L'EQUILIBRE
=====

Local perturbations and approach to equilibrium

by

R. LIMA (*) and A. VERBEURE (**)

ABSTRACT. — For the Fermi Lattice system locally perturbed equilibrium states are studied and conditions are found for approach to equilibrium within an order $t^{-\alpha}$ where $\alpha = n$, or $\frac{1}{n}$; n is a positive integer.

1. INTRODUCTION

We study the approach to equilibrium of a perturbed state by a local perturbation. We start with a solvable model (bilinear Hamiltonian) of a Fermi system. Its equilibrium state is well-defined. Then we apply a local perturbation. The first problem is to establish the perturbed equilibrium state (theorem 1 below). Then for those states which tend to equilibrium (in particular for ergodic states) we study how fast they tend to equilibrium. Sufficient conditions are given for an approach to equilibrium faster than $t^{-\alpha}$ where $\alpha = \frac{1}{n}$ or $\alpha = n$; n is a positive integer.

Technically we use the algebraic set-up and start with the C^* -Clifford algebra $\alpha \equiv \overline{\alpha(H, s)}$ (see e. g. [1]) built on a real Hilbert space (H, s) ; it is also the smallest C^* -algebra generated by the set of elements $\{B(\Psi) \mid \Psi \in H\}$, where B is a real linear map of H into α satisfying the anticommutation relations

$$[B(\Psi), B(\varphi)]_+ = 2s(\Psi \mid \varphi) \cdot \mathbf{1}$$

$\mathbf{1}$ is the unit element of α .

(*) Attaché de Recherche, C. N. R. S., Marseille (France).

(**) Permanent Address : Instituut voor Theoretische Natuurkunde, Departement Natuurkunde, Univ. Leuven, Celestijnenlaan 200 D, B-3030, Heverlee (Belgium).

In particular we are interested in the description of the Fermi lattice system (F. L. S.). Let $\mathbf{Z}$ be the set of all positive and negative integers, and $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ an orthonormal basis of H . For any finite subset Λ of $\mathbf{Z}$ consider the C^* -subalgebra $\mathfrak{A}(\Lambda)$ of $\mathfrak{A}$ generated by the set $\{B_k \equiv B(\varphi_k) \mid k \in \Lambda\}$; then $\mathfrak{A}$ is the norm closure of $\bigcup_{\Lambda \in \mathbf{Z}} \mathfrak{A}(\Lambda)$ and

can be considered as the algebra of quasi-local observables of the lattice.

Let $\sigma: a \in \mathbf{Z} \rightarrow \sigma_a$ be a mapping of the group $\mathbf{Z}$ of lattice translations into the $\star$ -automorphisms σ_a of $\mathfrak{A}$ defined by $\sigma_a B_k = B_{k+a}$.

On the other hand, consider a time translations induced by the following locally defined bilinear Hamiltonians: for each $\Lambda \subset \mathbf{Z}$, the hamiltonian $H_{0,\Lambda}$ is given by

$$(1) \quad H_{0,\Lambda} = \sum_{i,j \in \Lambda} v_{ij} B_i B_j$$

the c -numbers v_{ij} satisfy:

- (i) $v_{ij} = \bar{v}_{ji}$; $i, j \in \mathbf{Z}$;
- (ii) $\sum_{i \in \mathbf{Z}} |v_{ij}| < \infty$; $j \in \mathbf{Z}$
- (iii) $v_{i+k, j+k} = v_{i,j}$ for $i, j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

The details of the time evolution automorphisms will be given in the next section.

2. THE EQUILIBRIUM STATES

Define $\alpha_z^{0,\Lambda}$ by $\alpha_z^{0,\Lambda}(x) = e^{izH_{0,\Lambda}} x e^{-izH_{0,\Lambda}}$ for $x \in \mathfrak{A}$ ($z \in \mathbf{C}$) (complex numbers). The set $\{\alpha_z^{0,\Lambda} \mid z \in \mathbf{C}\}$ is a group of automorphisms of $\mathfrak{A}$ ($\star$ -automorphisms if $\text{Im } z = 0$).

If $\{\Lambda_n\}_n$ is a sequence of finite subsets of $\mathbf{Z}$ tending to infinity in the sense that it contains every finite subset then for each $t \in \mathbf{R}$ (real numbers), the sequence $\{\alpha_t^{0,\Lambda_n}\}_n$ tends strongly to a $\star$ -automorphism α_t^0 of $\mathfrak{A}$ defining a strongly continuous one-parameter group of automorphisms $t \in \mathbf{R} \rightarrow \text{aut. } \mathfrak{A}$ ([2], Th. 7.6.2).

LEMMA 1. — *The set of automorphisms $\{\alpha_z^{0,\Lambda} \mid z \in \mathbf{C}\}$ tends to a group of automorphisms $\{\alpha_z^0 \mid z \in \mathbf{C}\}$ densely defined on $\mathfrak{A}$ as Λ tends to infinity and*

$$\|\alpha_z^0(B_k)\| \leq \exp(|z| C),$$

where

$$C = \sum_{l \in \mathbf{Z}} |v_{l0} - v_{0l}|.$$

Proof. — For $k \in \Lambda$, where Λ is some finite subset of $\mathbf{Z}$, consider

$$z_z^{0,\Lambda}(B_k) = B_k + \frac{-z}{1!} B(D_\Lambda \varphi_k) + \dots + \frac{(-z)^n}{n!} B(D_\Lambda^n \varphi_k) + \dots,$$

where D_Λ is an antisymmetric operator on H defined by

$$(2) \quad \begin{aligned} s(\varphi_k | D_\Lambda \varphi_l) &= i(v_{lk} - v_{kl}) & \text{for } k, l \in \Lambda, \\ &= 0 & \text{for } k \text{ or } l \notin \Lambda. \end{aligned}$$

Note $D \equiv D_{\mathbf{Z}}$.

An immediate calculation shows that for all Λ ,

$$\| \alpha_z^{0,\Lambda}(B_k) \| \leq e^{|z|C}, \quad \text{with } C = \sum_{l \in \mathbf{Z}} v_{l0} - v_{0l}.$$

The existence of the limit : $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \alpha_z^{0,\Lambda}(B_k) \equiv \alpha_z^0(B_k)$ follows from the fact that $B(D_\Lambda^n \varphi_k)$ tends in norm to $B(D^n \varphi_k)$ as Λ tends to infinity because $\| B(D_\Lambda^n \varphi_k) \|^2 = s(D_\Lambda^n \varphi_k | D_\Lambda^n \varphi_k)$ and that $\alpha_z^{0,\Lambda}(B_k)$ is the limit, uniform in Λ , of the sequence $\{ f_\Lambda^N(z) \}_N$ with

$$f_\Lambda^N(z) = B_k + \sum_{l=1}^N \frac{(-z)^l}{l!} B(D_\Lambda^l \varphi_k).$$

Q. E. D.

Now we consider perturbations of the free (bilinear) Hamiltonian defined in (1). In particular consider the locally defined Hamiltonian :

$$(3) \quad H_\Lambda = H_{0,\Lambda} + V_n,$$

where $H_{0,\Lambda}$ is defined in (1) and V_n is any monomial of order n in the B_i :

$$V_n = B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_n}.$$

From [2] (Th. 7.6.2) it is clear that also the map

$$\alpha_t^\Lambda : x \in \mathfrak{A} \mapsto e^{itH_\Lambda} x e^{-itH_\Lambda}$$

tends to a $\star$ -automorphism α_t of $\mathfrak{A}$ as Λ tends to infinity.

LEMMA 2 :

(a) For each finite subset $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ and any $\beta \in \mathbf{R}$, $\exp(-\beta H_\Lambda)$ is an element of $\mathfrak{A}$ and can be written in the form

$$e^{-\beta H_\Lambda} = e^{-\beta H_{0,\Lambda}} T_{\Lambda,\beta},$$

where

$$T_{\Lambda,\beta} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\beta d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \prod_{l=1}^k \alpha_{t\beta_l}^{0,\Lambda}(V_n).$$

(b) If Λ tends to infinity, $T_{\Lambda, \beta} (T_{\Lambda, \beta}^{-1})$ tends to an element $T_{\beta} (T_{\beta}^{-1})$ of the algebra $\mathfrak{A}$, such that

$$T_{\beta} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0 (V_n).$$

(c) The group of $\star$ -automorphisms $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ extends to a group of automorphism (not $\star$ -automorphisms), $\{\alpha_{i\beta} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ densely defined on $\mathfrak{A}$ such that

$$\alpha_{i\beta}(\cdot) = \alpha_{i\beta}^0 (T_{\beta} \cdot T_{\beta}^{-1}).$$

Proof. — (a) is proved in [4], Appendix I.

To prove (b) remark first that

$$\left\| \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0 (V_n) \right\| \leq \frac{|\beta|^k}{k!} (e^{|\beta|} \mathfrak{A})^{nk}$$

and

$$T_{\Lambda, \beta}^{-1} = T_{\Lambda, \beta}^*.$$

Hence for all Λ :

$$\begin{aligned} \|T_{\Lambda, \beta}\| &\leq \exp [|\beta| (e^{|\beta|} \mathfrak{A})^n], \\ \|T_{\Lambda, \beta}^{-1}\| &\leq \exp [|\beta| (e^{|\beta|} \mathfrak{A})^n]. \end{aligned}$$

To prove the existence of the limit T_{β} in $\mathfrak{A}$ it is sufficient to remark that $T_{\Lambda, \beta}$ is the norm limit, uniform in Λ of the sequence $\{g_{\Lambda}^N\}_N$,

$$g_{\Lambda}^N = 1 + \sum_{k=1}^N \int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0 (V_n)$$

and that by lemma 1, each of the elements g_{Λ}^N has a limit if Λ tends to infinity. An analogous argument establishes the limit T_{β}^{-1} in $\mathfrak{A}$.

Using analogous arguments to derive (a) (see [4]) with an imaginary variable ($-it$) instead of the real variable β , we get

$$\alpha_t^{\Lambda} (x) = \alpha_t^0 (T_{\Lambda, -it} x T_{\Lambda, -it}^{-1}), \quad x \in \mathfrak{A}.$$

As in (b), $T_{\Lambda, -it}$ tends to an element T_{-it} of the algebra if Λ tends to infinity. Then trivially

$$\alpha_t (x) = \alpha_t^0 (T_{-it} x T_{-it}^{-1}), \quad x \in \mathfrak{A}.$$

The proof of (c) is complete if we prove that this expression can be extended to a purely imaginary variable. For this it follows from (b)

that $\alpha_{i\beta}^0(T_\beta)$ exists, hence on all elements $x \in \mathfrak{A}$ in the domain of $\alpha_{i\beta}^0$, $\alpha_{i\beta}$ is defined and given by

$$\alpha_{i\beta}(x) = \alpha_{i\beta}^0(T_\beta x T_\beta^{-1}), \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Q. E. D.

In the F. L. S. for any evolution $t \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha_t^0 : \alpha_t^0(B(\varphi_k)) = B(e^{it\varphi_k})$ there exists a unique quasi-free state on $\mathfrak{A}$, satisfying the Kubo-Martin-Schwinger boundary condition with respect to the evolution α_t^0 [5]. The quasi-free state is uniquely determined as is well known see e. g. [1] by an antisymmetric operator A on H given by

$$A = J \frac{e^{\beta|D|} - e^{-\beta|D|}}{e^{\beta|D|} + e^{-\beta|D|}},$$

$$D = J|D| \quad (\text{polar decomposition of } D).$$

This state will be called the equilibrium state for that evolution. Note by ω_0 the equilibrium state linked to the evolution α_t^0 induced by the bilinear Hamiltonian given above in (1) and let H_0 , $\mathfrak{H}_0$, Ω_0 be the G. N. S.-representation, respectively representation space an cyclic vector induced by ω_0 .

Now we look for the equilibrium state ω_β linked to the evolution $t \rightarrow \alpha_t$, induced by the Hamiltonian (3). We prove that

$$(4) \quad \omega_\beta(\cdot) = \frac{\omega_0(T_\beta \cdot)}{\omega_0(T_\beta)} = \frac{(\Omega_0 | \Pi_0(T_\beta) \Pi_0(\cdot) \Omega_0)}{(\Omega_0 | \Pi_0(T_\beta) \Omega_0)}.$$

LEMMA 3. — With the notations of above and T_β , $\beta \in \mathbb{R}$ defined in Lemma 3, we have

$$\Pi_0(T_\beta) = \lambda \Pi_0(\alpha_{-i\beta/2}^0(T_{\beta/2}) T_{\beta/2}),$$

where λ is a constant.

Proof. — We prove that :

$$\Pi_0(T_\beta)^{-1} \Pi_0(\alpha_{-i\beta/2}^0(T_{\beta/2}) T_{\beta/2})$$

commutes with a weakly dense subset of $\Pi_0(\mathfrak{A})''$, hence it belongs to the commutant $\Pi_0(\mathfrak{A})'$. Otherwise it follows from Lemma 2 (b) that it also belongs to the algebra $\Pi_0(\mathfrak{A})''$, and ω_0 being a factor state [6] the lemma follows.

By lemma 2 (c) there exists a dense set of elements $x \in \mathfrak{A}$ such that (for convenience $\beta = 1$) :

$$\Pi_0(\alpha_{i/2}(x)) = \Pi_0(\alpha_{i/2}^0(T_{1/2} x T_{1/2}^{-1})).$$

Also

$$\alpha_i = \alpha_{i/2} \circ \alpha_{i/2}, \quad \alpha_i^0 = \alpha_{i/2}^0 \circ \alpha_{i/2}^0,$$

hence

$$\Pi_0(\alpha_i(x)) = \Pi_0(\alpha_i^0(\alpha_{-i/2}^0 T_{1/2}) T_{1/2} x T_{1/2}^{-1} \alpha_{-i/2}^0 (T_{1/2}^{-1}))$$

and

$$\begin{aligned} \Pi_0(T_1) \Pi_0(x) \Pi_0(T_1^{-1}) &= \Pi_0(\alpha_{-i}^0 \circ \alpha_i(x)) \\ &= \Pi_0(\alpha_{-i/2}^0 (T_{1/2})) \Pi_0(T_{1/2}) \Pi_0(x) \\ &\quad \times \Pi_0(T_{1/2}^{-1}) \Pi_0(\alpha_{-i/2}^0 (T_{1/2}^{-1})). \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \Pi_0(T_1)^{-1} \Pi_0(\alpha_{-i/2}^0 (T_{1/2})) \Pi_0(T_{1/2}) \Pi_0(x) \\ = \Pi_0(x) \Pi_0(T_1)^{-1} \Pi_0(\alpha_{-i/2}^0 (T_{1/2})) \Pi_0(T_{1/2}) \end{aligned}$$

for a dense set of elements $\Pi_0(x)$ of $\Pi_0(\mathcal{A})''$.

Q. E. D.

LEMMA 4. — *With the same notations as in lemma 3,*

$$\Pi_0(\alpha_{i\beta/2}^0 (T_{+\beta/2})) = \mu \Pi_0(T_{\beta/2}^*) = \mu \Pi_0(T_{-\beta/2})^{-1},$$

where μ is a constant.

Proof. — As in the proof of lemma 3 for a dense set of elements $x \in \mathcal{A}$ (put $\beta = 1$) :

$$\Pi_0(\alpha_{-i/2}(x)) = \Pi_0(\alpha_{-i/2}^0 (T_{-1/2} x T_{-1/2}^{-1}))$$

and

$$\alpha_{i/2} \circ \alpha_{-i/2}(x) = x.$$

Hence

$$\begin{aligned} \Pi_0(x) &= \Pi_0(\alpha_{i/2}^0 (T_{1/2} [\alpha_{-i/2}^0 (T_{-1/2} x T_{-1/2}^{-1})] T_{1/2}^{-1})) \\ &= \Pi_0(\alpha_{i/2}^0 (T_{1/2})) \Pi_0(T_{-1/2}) \Pi_0(x) \Pi_0(T_{-1/2})^{-1} \Pi_0(\alpha_{i/2}^0 (T_{1/2}))^{-1} \end{aligned}$$

and

$$\Pi_0(\alpha_{i/2}^0 (T_{1/2})) \Pi_0(T_{-1/2}) \in \Pi_0(\mathcal{A})'' \cap \Pi_0(\mathcal{A})'.$$

By the factoriality of Π_0 :

$$\mu \Pi_0(T_{-1/2})^{-1} = \Pi_0(\alpha_{i/2}^0 (T_{1/2})) \quad \text{with } \mu \in \mathbb{C}.$$

Q. E. D.

THEOREM 1. — *The functional ω_β defined by (4) on $\mathcal{A}$ is a state satisfying the K. M. S. boundary condition with respect to the evolution $t \rightarrow \alpha_t$ linked to the Hamiltonian defined in (3).*

Proof. — First we prove that it is a state. By lemma 3 for a dense set of elements $x \in \mathcal{A}$,

$$\omega_\beta(x) = \frac{\omega_0(\alpha_{-i\beta/2}^0 (T_{\beta/2}) T_{\beta/2} x)}{\omega_0(\alpha_{-i\beta/2}^0 (T_{\beta/2}) T_{\beta/2})}.$$

By the invariance of ω_0 for α_t^0 :

$$\omega_\beta(x) = \frac{\omega_0(\alpha_{\beta/2}^0(T_{\beta/2})\alpha_t^0(T_{\beta/2}x))}{\omega_0(T_{\beta/2}\alpha_{\beta/2}^0(T_{\beta/2}))}.$$

By the fact that ω_0 is a K. M. S. state for the evolution $t \rightarrow \alpha_t^0$:

$$\omega_\beta(x) = \frac{\omega_0(T_{\beta/2}x\alpha_{\beta/2}^0(T_{\beta/2}))}{\omega_0(T_{\beta/2}\alpha_{\beta/2}^0(T_{\beta/2}))}$$

and by lemma 4 :

$$\omega_\beta(x) = \frac{\omega_0(T_{\beta/2}xT_{\beta/2}^*)}{\omega_0(T_{\beta/2}T_{\beta/2}^*)}$$

hence ω_β is a state.

That ω_β satisfies the K. M. S. condition with respect to the evolution $t \rightarrow \alpha_t$ follows from the fact ω_0 is a K. M. S. state for the evolution $t \rightarrow \alpha_t^0$ as follows :

$$\begin{aligned}\omega_0(T_\beta y \alpha_t(x)) &= \omega_0(T_\beta y \alpha_{t\beta}^0(T_\beta x T_\beta^{-1})) \\ &= \omega_0(T_\beta x T_\beta^{-1} T_\beta y) = \omega_0(T_\beta xy)\end{aligned}$$

for all $y \in \mathcal{A}$ and a dense set of elements $x \in \mathcal{A}$.

Q. E. D.

3. APPROACH TO EQUILIBRIUM

In this section we consider the evolution and behaviour at infinity of the state

$$(5) \quad \rho_t = \omega_\beta \circ \alpha_t^0$$

this is the free evolution of the perturbed state. Because of the particular form of the equilibrium state ω_β in terms of the state ω_0 (see theorem 1), an easy argument shows that the state ρ_t tends pointwise to the original state ω_0 if the latter one is ergodic in the sense that it is an extremal time invariant state.

A necessary and sufficient condition for ergodicity is that the spectrum of the operator D is purely continuous ([3], Th. 1). In what follows we suppose that the evolution α_t^0 satisfies this condition, and we are interested in the question, how fast the state ρ_t tends to ω_0 as t tends to infinity. We do not give a general answer to this question, but only consider the situation that the convergence is faster than any rational power of t .

LEMMA 5. — *For ergodic bilinear interactions as given in (1), the approach in the weak sense, for local observables of the perturbed state ρ_t (5) to the equilibrium state ω_0 is majorized by homogeneous polynomials in the functions*

$$F_{ij}(t) = s(\varphi_i e^{D t} \varphi_j)$$

in particular, if $X = B_{i_1} \dots B_{i_n}$, then

$$|\rho_t(X) - \omega_0(X)|$$

tends to zero if t tends to infinity, at least as fast as $F_{ij}(t)^{2m}$.

Proof. — We prove the lemma explicitly for observables which are monomials of order two, i. e. $m = 1$ in the lemma. The generalization to arbitrary order is trivial.

By lemma 2 :

$$\begin{aligned} \rho_t(B_i B_j) - \omega_0(B_i B_j) \\ = \frac{1}{\omega_0(T_\beta)} [\omega_0(T_\beta B(e^{D_t} \varphi_i) B(e^{D_t} \varphi_j)) - \omega_0(T_\beta) \omega_0(B_i B_j)]. \end{aligned}$$

Using the time invariance of ω_0 ; in particular :

$$\omega_0(B(e^{D_t} \varphi_j) B(e^{D_t} \varphi_i)) = \omega_0(B_i B_j)$$

we have

$$\begin{aligned} \rho_t(B_i B_j) - \omega_0(B_i B_j) \\ = \frac{1}{\omega_0(T_\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{-\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \\ \times \left[\omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0(V_n) B(e^{D_t} \varphi_i) B(e^{D_t} \varphi_j) \right) \right. \\ \left. - \omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0(V_n) \right) \omega_0(B_i B_j) \right]. \end{aligned}$$

But

$$\alpha_{i\beta_l}^0(V_n) = \prod_{p=1}^n \alpha_{i\beta_l}^0(B_{i_p})$$

hence

$$\begin{aligned} \rho_t(B_i B_j) - \omega_0(B_i B_j) \\ = \frac{1}{\omega_0(T_\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{-\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \dots \int_0^{\beta_{k-1}} d\beta_k \\ \times \left[\omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \prod_{p=1}^n \alpha_{i\beta_l}^0(B_{i_p}) B(e^{D_t} \varphi_i) B(e^{D_t} \varphi_j) \right) \right. \\ \left. - \omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \prod_{p=1}^n \alpha_{i\beta_l}^0(B_{i_p}) \right) \omega_0(B_i B_j) \right]. \end{aligned}$$

From lemma 1 :

$$\alpha_{i\beta_l}^0(B_{i_p}) \leq e^{\beta_l}$$

for all l and p .

Suppose for the moment $V_n = B_1 B_2$ and put $\alpha_{i\beta_l}^0(B_s) = G_{2(l-1)+s}$ for $l = 1, \dots, k$ and $s = 1, 2$, then using the recursion formula for quasi-free states (see e. g. [5], Appendix) :

$$\left| \omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0(B_1) \alpha_{i\beta_l}^0(B_2) B(e^{b_l} \varphi_l) B(e^{b_l} \varphi_l) \right) - \omega_0 \left(\prod_{l=1}^k \alpha_{i\beta_l}^0(B_1) \alpha_{i\beta_l}^0(B_2) \right) \omega_0(B_i B_j) \right| \\ = \sum_{m=1}^k \sum_{m' \neq q} \left| \omega_0(\hat{G}_1 \dots \hat{G}_m \dots \hat{G}_{m'} \dots G_{2k}) \omega_0(\hat{G}_m B(e^{b_l} \varphi_l)) \omega_0(G_{m'} B(e^{b_l} \varphi_l)) \right|,$$

where $\hat{G}_m$ and $\hat{G}_q$ stand for G_m and G_q omitted in the product.

The right hand side is majorized by

$$2^k (2k - 1) e^{2k - 2} \beta_l f(t),$$

with

$$f(t) = \max_{m, q \in \mathbb{Z}} \left| \omega_0(G_m B(e^{b_l} \varphi_l)) \omega_0(G_q B(e^{b_l} \varphi_l)) \right| \leq e^{2\beta_l}.$$

Hence

$$\left| \omega_l - \omega_0(B_i B_j) \right| \leq \frac{1}{|\omega_0(T_\beta)|} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} 2^k (2k - 1) e^{2k - 2} \beta_l \right) f(t) \\ = \frac{1}{|\omega_0(T_\beta)|} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 P} (e^{\beta P^2}) \right) f(t),$$

where $P = e^{2\beta_l}$.

In general, for V_n a monomial of order n as in (3) :

$$\left| \omega_l - \omega_0(B_i B_j) \right| \leq \frac{1}{|\omega_0(T_\beta)|} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 P} (e^{\beta P^n}) \right) f(t).$$

Hence the majorization is dominated by the behaviour of the function

$$t \rightarrow \omega_0(\alpha_{i\beta}^0(B_p) B(e^{b_l} \varphi_l)).$$

By straight forward calculation, analogous to that in the proof of lemma 1, we get

$$\left| \omega_0(\alpha_{i\beta}^0(B_p) B(e^{b_l} \varphi_l)) \right| \leq |F_{p_1 j}(t)| \\ + \beta \frac{C}{1!} |F_{p_1 j}(t)| + \dots + \frac{\beta^n C^n}{n!} |F_{p_n j}(t)| + \dots$$

where $p_1 \neq p, p_2 \neq p, p_1, \dots$

Remarking that the right hand side is convergent, the lemma follows.

Q. E. D.

From lemma 5, it follows that the approach to equilibrium is reduced to the study of the asymptotic behaviour of the function

$$(6) \quad F_{ij}(t) = s(\varphi_i e^{it} \varphi_j) \quad (i, j \in \mathbb{Z})$$

as t tends to infinity.

Remark first that because of the translation invariance $F_{ij}(t)$ depends only on the difference $\delta = |j - i|$. It will become clear that the asymptotic behaviour of $F_{ij}(t)$ for large t does even not depend on δ .

Let $a_n = i(v_{n0} - v_{0n})$ and

$$(7) \quad g(x) = \sum_{n < 0} a_n e^{inx} - \sum_{n \geq 0} a_n e^{inx} = 2i \sum_{n \geq 0} a_n \sin nx,$$

then for all φ_k elements of the orthonormal basis

$$\{\varphi_j(x) = e^{ijx}, x \in [0, 2\pi)\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

of $L^2([0, 2\pi])$:

$$(D \varphi_j)(x) = g(x) \varphi_j(x)$$

and

$$(8) \quad s(\varphi_i e^{it} \varphi_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it\varphi(x)} e^{t\varphi_j(x)} dx.$$

THEOREM 2. — Let H_0 be a bilinear Hamiltonian [see (1)] such that the corresponding function $g(x)$ [see (7)] is at least K -times differentiable and also K is the maximum order of the stationary points in the interval $[0, 2\pi]$, then the function $F_{ij}(t)$ [see (6)] tends to zero as $\frac{1}{t^{1/(1+K)}}$ if t tends to infinity.

Proof. — The theorem follows immediately from [7] (p. 52) applied to the integral (8). The result is independent of δ . We remark that the function $g(x)$ being odd, the contribution of the term $\frac{1}{t^{1/(1+K)}}$ does not vanish if $g(x)$ has a stationary point of order K .

Q. E. D.

THEOREM 3. — Let H_0 be as theorem 1 and the function $g(x)$ such that there exists a finite sequence $(x_0, \dots, x_l)$:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_l = \pi$$

such that :

(i) The function $g(x)$ is monotone and $(K+1)$ -times continuously differentiable in the open intervals (x_i, x_{i+1}) with $i = 0, 1, \dots, l-1$ and $g'(x) \neq 0$ and g continuous.

(ii) $g(x)$ has left and right points of contact of order K in each x_i , i. e. if g^{-1} is the inverse function of g , then :

$$\lim_{y \rightarrow g(x_i) \pm 0} (g^{-1})'(y) = \lim_{y \rightarrow g(x_i) \pm 0} (g^{-1})'' = \dots = \lim_{y \rightarrow g(x_i) \pm 0} (g^{-1})^{(K)}(y) = 0.$$

Then $F_{ij}(t)$ tends to zero if t tends to infinity as $\frac{1}{t^{1+K}}$.

Proof. — In each interval $[x_k, x_{k+1}]$ introduce the variable u by $iu = g(x)$ then

$$F_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \Phi(u) e^{iut} du,$$

where

$$\Phi(u) = e^{-i\partial_{(g^{-1})}(iu)} \frac{dg^{-1}(iu)}{du}.$$

If $iu_j = g(x_j)$; $j = 0, 1, \dots, l$ then

$$\Phi^{(n)}(u_i) = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, K-1; \quad i = 0, \dots, l.$$

Now the result follows from [7] (p. 49).

Q. E. D.

Remarks. — If in theorem 3, the function $g(x)$ satisfies condition (ii) for all integers K , then the function $F_{ij}(t)$ is a “rapidly decreasing” function of t as t tends to infinity.

Although we only stated the results for the Fermi lattice systems, the treatment can easily be generalized to the continuous Fermi system, where $H_{0,\Lambda}$ is the free Hamiltonian for the volume Λ ; for the interaction we take a finite linear combination of monomials

$$B(\Psi_{i_1}) \dots B(\Psi_{i_n})$$

such that all Ψ_{i_k} belong to the domain of the operator D induced by the free Hamiltonian.

The independence of the results on the local perturbation suggests that the results remain valid for some strictly quasi-local perturbations. The characterization of the most general perturbation such that the perturbed equilibrium state is a K. M. S. state for the same von Neumann algebra is an open question.

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank M. Sirugue and D. Testard for useful discussions. One of us (A. Verbeure) thanks sincerely Professors D. Kastler and A. Visconti for their kind hospitality at the C. N. R. S. of Marseille during the month of November 1971, when this paper was achieved.

APPENDIX

As an example we treat the perturbed XY-model given locally by

$$(A\ 1) \quad H_N = - \sum_{j=0}^N \{ J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \mu h \sigma_j^z \},$$

$\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z$ being the ordinary Pauli matrices.

The Hamiltonian (A 1) is a particular case of (1). An explicit calculation of the operator D [see formula (2)] yields :

$$(D^2 \varphi)(z) = h(z) \varphi(z); \quad z = e^{ix}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

where $\varphi \in L^2([0, 2\pi])$:

$$-h(z) = J_x^2 + J_y^2 + (\mu h)^2 + \mu h (J_x + J_y) (z^{-2} + z^2) + J_x J_y (z^{-4} + z^4).$$

By a straightforward calculation, the function $s(\varphi_i e^{in'} \varphi_j)$ is obtained as the sum of integrals of the type (8), where $g(x)$ is replaced by the function $h(z)$; then we can apply theorem 2; the equation for the stationary point is

$$\frac{dh(z)}{dz} = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} h(z) = 0, \quad \text{where } z = e^{ix}.$$

The solutions of this equation are

$$z_n = e^{in\pi/2} \quad (n = 0, 1, 2, 3).$$

These stationary points are of order one ($K = 1$), because

$$\left. \frac{d^2 h(z)}{dz^2} \right|_{z=z_n} = -z_n^2 \cdot 8 \mu h (J_x + J_y) - 32 J_x J_y \neq 0.$$

The asymptotic behaviour of $s(\varphi_i e^{in'} \varphi_j)$ is therefore of order $t^{-1/2}$ as t tends to infinity.

In particular for $X = B_k B_l$; it follows that

$$\rho_t(B_k B_l) - \omega_0(B_k B_l)$$

tends to zero proportional to t^{-1} as t tends to infinity, a result found in [8]. Remark that in [8] only a perturbation of the type $V_2 = B_i B_i$ is considered. In lemma 5 we proved furthermore that the results are independent of the perturbation as far as the perturbation remains strictly local.

REFERENCES

- [1] E. BALSLEV, J. MANUCEAU and A. VERBEURE, *Comm. Math. Phys.*, vol. 8, 1968, p. 315.
- [2] D. RUELLE, *Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin Inc., 1969.
- [3] A. VERBEURE, *The Notion of Ergodicity in Solvable Models; Statistical Mechanics and Field Theory*; Keter Publishing House, Kiryat Moshe, Jerusalem.
- [4] C. RADIN, *Comm. Math. Phys.*, vol. 23, 1971, p. 189.
- [5] F. ROCCA, M. SIRUGUE and D. TESTARD, *Comm. Math. Phys.*, vol. 13, 1969, p. 317.
- [6] J. MANUCEAU and A. VERBEURE, *Comm. Math. Phys.*, 18, 1970, p. 319.
- [7] A. ERDERLYI, *Asymptotic Expansion*, Dover, 1956.
- [8] D. B. ABRAHAM, E. BAROUCH, G. GALLAVOTTI and A. MARTIN-LOF, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, 1970, p. 1449.

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1973.)

1. REFERENCES BREVES A LA STRUCTURE DES SIMPLEXES

=====

Nous donnons ici quelques résultats sans démonstration, utiles pour la suite.

1.1 Soit E un espace localement convexe Hausdorff sur $\mathbb{R}$ (e.l.c.) et K un sous-ensemble de E , convexe et compact. La théorie de la représentation des points de K par des mesures de Radon fait intervenir l'espace vectoriel $A(K,E)$ des restrictions à K de fonctions affines réelles sur E . En général nous avons

$$A(K, E) \subset A(K)$$

où $A(K)$ est l'ensemble des fonctions affines réelles sur K .

Les deux résultats qui suivent permettent, dans la plupart des cas, de considérer K plongé dans un e.l.c. Hausdorff sur $(\mathbb{R}, F)$ de telle sorte que

$$A(K, F) = A(K)$$

Proposition III.1.1

Soit K un ensemble convexe compact dans un e.l.c. E . Soit $a \in A(K)$, alors il existe une suite croissante de $A(K,E)$ qui converge uniformément vers a .

En particulier $A(K,E)$ est uniformément dense dans $A(K)$.

Démonstration : Voir [1], Corollaire I.1.5.

Proposition III.1.2

Soit K un ensemble convexe compact dans un e.l.c. E . Il existe toujours un (autre) e.l.c. F tel que

$$A(K) = A(K, F) .$$

On peut prendre $F = A(K)_w^*$ -le dual de $A(K)$ muni de la topologie faible- et ce plongement est unique en ce sens que pour tout autre e.l.c. F' vérifiant la même propriété il existe un homéomorphisme linéaire de F' dans $A(K)_w^*$ qui préserve les images de K .

Démonstration : Voir [1], Théorème II.2.4 .

A partir de maintenant nous supposons toujours K régulièrement plongé dans E , au sens du théorème précédent.

1.2 Une mesure de Radon réelle sur un compact Hausdorff K est un élément de $\mathcal{C}_R(K)^*$.

A chaque mesure de Radon sur K correspond une mesure de Baire unique. Le σ -clan de Baire est engendré par les fermés G_δ de K .

La correspondance $\mu \mapsto \mu_0$ est donnée par

$$\mu(f) = \int_K f(x) d\mu_0(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}_R(K)$$

Chaque mesure de Radon peut s'étendre de façon unique en une mesure de Borel régulière. Le σ -clan de Borel est engendré par les fermés de K .

Soit K un convexe compact Hausdorff et μ une mesure de probabilité (i.e. positive et normée) de Radon sur K . Rappelons une

Définition :

La mesure μ représente $x \in K$ (ou encore $r(\mu) = x$, où x est le barycentre de μ) si

$$\mu(f) = f(x) \quad \forall f \in A(K)$$

Notons $M_1^+(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur K . Notons $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K et $\delta_x, x \in K$ la mesure de Dirac en x .

Proposition III.1.3

Soit K un convexe compact Hausdorff. Toute mesure de probabilité de Radon sur K représente un point (unique) de K . Tout point de K est barycentre de (au moins) une mesure de probabilité de Radon sur K . Une condition nécessaire et suffisante pour que $x \in \mathcal{E}(K)$ est que δ_x soit la seule mesure de $M_1^+(K)$ avec barycentre x .

Démonstration : Voir [2] et [1], Corollaire I.2.4.

1.3 L'étude analytique des ensembles convexes compacts peut se faire en utilisant les notions précédentes. Un objectif serait d'obtenir une représentation des points du convexe compact par des mesures à support dans l'ensemble des points extrémaux, comme cela est le cas dans la décomposition barycentrique en dimension finie.

Bien que, en général, ces mesures n'existent pas, on peut définir un ordre dans l'ensemble des mesures, pour lequel les mesures maximales donnent les meilleures solutions à ce problème.

Il est naturel de définir cet ordre sur les fonctions convexes car leurs plus grandes valeurs correspondent aux points "proches" des points extrémaux.

Plus exactement, si $P(K)$ désigne l'ensemble des fonctions convexes (continues) réelles on a la

Définition (Ordre de Choquet)

On définit un ordre partiel et inductif dans $M^+(K)$ par

$$\mu, \nu \in M^+(K) : \mu \preceq \nu \Leftrightarrow \mu(f) \leq \nu(f) \quad \forall f \in P(K)$$

Il résulte immédiatement de la définition que deux mesures comparables ont le même barycentre.

On appelle mesure maximale une mesure qui est maximale pour l'ordre ainsi défini.

Une caractérisation utile des mesures maximales s'obtient à partir de la notion de enveloppe concave f d'une fonction f .

Si $f \in \mathcal{C}_R(K)$ on pose:

Nous avons alors le :

Théorème III.1.4 (Mokobodsky)

Soit $\mu \in M_+^*(K)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) μ est maximale pour l'ordre de Choquet.
- (b) $\mu(\hat{f}) = \mu(f) \quad \forall f \in C(K)$
- (c) $\mu(\tilde{f}) = \mu(f) \quad \forall f \in C(K)$

Démonstration : Voir [3]

Le résultat que l'on obtient est le suivant :

Proposition III.1.5

Soit $\mu \in M_1^+(K)$ une mesure maximale pour l'ordre de Choquet. Alors

$$\text{supp } \mu = \overline{E(K)}$$

Démonstration : Voir [1], Proposition I.4.6 .

En fait, un résultat plus précis dû à Bishop-de-Leeuw [2] assure que si $\mu \in M_1^+(K)$ est maximale alors $\mu(f) = 0$ pour toute fonction ayant support contenu dans un fermé G_S disjoint de $E(K)$.

1.4 Soit K un ensemble convexe compact Hausdorff et $f \in P(K)$. On appelle ensemble frontière de f , le sous-ensemble X_f de K , défini par

$$X_f = \{x \in K : f(x) = \inf_{t \in [0,1]} f(tx + (1-t)y)\}$$

Ceci permet d'annoncer le résultat suivant.

Proposition III.1.5

Soit K un ensemble convexe compact Hausdorff. Alors

$$(1) \quad \mathcal{P}(K) = \bigcap_{f \in P(K)} X_f$$

(2) une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu \in M_1^+(K)$ soit maximale est que :

$$\forall f \in P(K) \quad , \quad \mu^*(K \setminus X_f) = 0$$

où μ^* est l'extension de Borel de μ .

Démonstration : Voir [2], Proposition 2.7.2 et Théorème 2.7.4.

On démontre alors sans trop de difficulté que l'ensemble des mesures de probabilité maximales est une face dans l'ensemble des mesures de probabilité sur K .

De plus (cf. [2], Proposition 27.7) l'ensemble des mesures maximales positives étant un cône convexe on peut démontrer qu'il est héréditaire à gauche (pour son ordre propre, différent de celui de Choquet).

Il s'ensuit que ce même ensemble est un treillis (supérieur et inférieur) dans son propre ordre.

D'après ce qui précède on peut conclure aussi que tout point de K possède une mesure maximale (au moins) qui le représente.

1.5 Dans la terminologie que nous utilisons, un simplexe est un convexe compact K tel que le cône $\tilde{K} \subset E \times \mathbb{R}$ défini par

$$\tilde{K} = \{ (\lambda x, \lambda) , x \in K , \lambda \geq 0 \}$$

est un treillis dans son propre ordre.

Le théorème qui suit caractérise les convexes compacts qui sont des simplexes.

Théorème III.1.6 (Choquet-Meyer)

Soit K un ensemble convexe compact Hausdorff.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) K est un simplexe

$$(2) \quad f \in P(K) \Rightarrow \hat{f} \in A(K)$$

$$(3) \quad \mu \in M_1^+(K) \quad , \quad \mu \text{ maximale}, f \in P(K) \Rightarrow \mu(f) = \hat{f}(r(\mu))$$

(4) L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire sur $P(K)$;

(5) Pour chaque $x \in K$ il existe une unique mesure maximale de $M_1^+(K)$ qui représente x .

Démonstration : Voir [4].

1.6 Une face d'un ensemble convexe K est une partie convexe F de K qui vérifie une des propriétés équivalentes suivantes

$$(1) \quad x \in F \quad \text{et} \quad x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad x_1, x_2 \in K, \quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow x_1, x_2 \in F$$

(2) F est la trace dans K d'une variété d'appui M

(une variété affine M de E est dite d'appui de K , si $K \cap M \neq \emptyset$ et $K \setminus M$ est convexe.

$$(3) \quad x \in F \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad x_i \in K \Rightarrow x_i \in K$$

(4) L'ensemble

$$\tilde{F} = \{ (\lambda x, \lambda), \lambda \geq 0, x \in F \} \subset E \times \mathbb{R}$$

est un sous-cone (convexe) héréditaire dans K , ordonné par son propre ordre.

La démonstration de l'équivalence de ces propriétés se trouve dans [5]. On appelle σ -face de K , toute partie de K qui est une réunion de faces de K .

Si K est un convexe compact Hausdorff, on peut énoncer les propriétés suivantes.

Proposition III.1.7

- (1) Soient $G \subset F \subset K$ et G une σ -face de F , F une face de K . Alors G est une σ -face de K .
- (2) Si F est une face de K , alors $\mathcal{F}(F) \subset \mathcal{F}(K)$.
- (3) Toute intersection de faces (resp. σ -faces) de K est une face (resp. σ -face) de K .
- (4) Toute réunion d'une famille filtrante croissante pour l'inclusion, de faces de K est une face de K .

Démonstration : Voir [5].

Plus précisément, si K est un simplexe nous avons les résultats suivants.

Proposition III.1.8

Soit K un simplexe. Alors

- (1) Toute face fermée de K est un simplexe.
- (2) Soit G une σ -face, $G = \bigcup_i F_i$, chaque F_i face fermée de K . Soit f une fonction définie sur G et affine semi-continue supérieurement sur chaque F_i . Alors il existe une extension $\bar{f}$ de f à la face fermée $\text{conv}(G)$.
- (3) (Lazar). Si, de plus dans (2), f est continue sur chaque F_i , alors f est continue. On a encore ce résultat si G est fermée, sans que la famille $\{F_i\}$ soit finie.
- (4) Si G est une σ -face fermée de K , l'enveloppe convexe fermée F de G est une face fermée de K .
- (5) Une face fermée F est toujours l'ensemble de points où une fonction affine semi-continue supérieurement sur K atteint son maximum.

Démonstration : Voir [5].

Nous utiliserons souvent le résultat suivant.

Proposition III.1.9 (Mokobodzki)

Soit K un simplexe. Tout convexe compact $F \subset K$, vérifiant

$$\mathcal{L}(F) < \mathcal{L}(K)$$

est une face de K .

Démonstration : Voir [6], Lemme 28.

Remarque : Cette Proposition est fausse si on remplace la condition K simplexe par K convexe compact.

1.7 On appelle simplexe de Bauer tout simplexe K dont l'ensemble des points extrémaux est fermé.

D'après la Proposition III.1.5 on peut trouver, dans ce cas, une mesure avec support dans $\mathcal{E}(K)$ pour représenter chaque point de K .

Les principales propriétés d'un simplexe de Bauer sont résumées dans la Proposition suivante.

Proposition III.1.10

Soit K un convexe compact Hausdorff. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) K est un simplexe de Bauer.
- (2) Tout point de K est barycentre d'une unique mesure de probabilité portée par $\mathcal{E}(K)$.
- (3) K est un simplexe et l'application $x \mapsto \mu_x$, unique mesure maximale représentant x , de K dans $M_1^+(K)$ est affine et continue (top. vague).
- (4) L'ensemble des fonctions affines et continues sur K , ordonné par sa partie positive est réticulé.
- (5) Toute fonction continue sur $\overline{\mathcal{E}(K)}$ se prolonge (de façon unique) en une fonction de $A(K)$.

Démonstration : Voir [5] .

Le résultat qui suit éclaire la structure des simplexes de Bauer.

Proposition III.1.11

Une partie K de E est un simplexe de Bauer si et seulement si K est isomorphe, par une bijection affine et continue, à l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur un espace compact.

Démonstration : Voir [2] .

L'étude des faces fermées d'un simplexe de Bauer joue un rôle important dans la connaissance de sa structure. D'autre part il est rendu aisé par les deux résultats suivants :

Proposition III.1.12 (Alfsen)

Si K est un convexe compact, toute face fermée F de K , est de la forme

$$F = \overline{\text{conv}}(A) \text{ ou } A \subset \mathcal{E}(K)$$

Inversement, si K est un simplexe de Bauer, pour toute partie

$A \subset \mathcal{E}(K)$, $F = \overline{\text{conv}}(A)$ est une face fermée de K .

Démonstration : Voir [7] .

Et aussi :

Proposition III.1.13 (Størmer)

Soit K un simplexe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) K est un simplexe de Bauer.
- (2) Pour toute face F de K , $\bar{F}$ est une face de K .

Démonstration : Voir [8].

Un exemple classique d'un simplexe qui n'est pas de Bauer est le suivant :

$$K = \{ \mu \in \mathcal{L}' \mid \mu \geq 0 \text{ sur } \mathcal{L}^+ \text{ et } \mu(1) = 1 \}$$

où

$$\mathcal{L} = \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = \frac{f(1/2) + f(1)}{2} \}$$

1.8 Avant de donner quelques résultats sur l'action d'un groupe d'homéomorphismes affines d'un simplexe nous passons en revue les propriétés utiles pour la suite des moyennes sur les groupes topologiques.

Soit G un groupe topologique et notons $\mathcal{CB}(G)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur G , muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{t \in G} |f(t)|$$

C'est une C^* -algèbre commutative

Une moyenne sur G est un état de $\mathcal{CB}(G)$. G agit sur $\mathcal{CB}(G)$ de façon naturelle

$$s \in G, (s \circ f)(t) = f(s^{-1}t) \quad \forall t \in G$$

Une moyenne invariante est un état invariant par l'action biadual de G . Le problème de l'existence d'une moyenne invariante sur un groupe est un problème fondamental dans cette théorie.

Le concept de groupe moyennable permet de donner une réponse à ce problème d'existence.

Un groupe topologique G , localement compact, est dit moyennable si

$\forall \epsilon > 0$ et tout compact $S \subset G$ il existe un ensemble de Borel $U \subset G$ avec $0 < |U| < \infty$ tel que

$$\frac{1}{|U|} \cdot |\int_U \Delta U| < \epsilon \quad \text{pour tout } s \in G$$

où $|U|$ est la mesure de Haar à gauche et Δ désigne la différence symétrique.

A l'aide de cette définition, on peut énoncer la propriété suivante.

Proposition III.1.14 (Ryll-Nardzewski)

Soit G un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) G est moyennable.
- (2) Il existe une moyenne invariante sur G .

Démonstration : Voir [14], Théorème 3.6.2.

On dit que un groupe localement compact G possède la propriété du point fixe si, quand il agit de façon affine sur un ensemble convexe compact K dans un espace localement convexe E , l'application $G \times K \rightarrow K$ étant continue, alors il existe

un point fixe $x \in K$ pour l'action de G .

Un résultat important pour la suite, démontré récemment, est le suivant :

Proposition III.1.15 (Rickert)

Soit G un groupe localement compact.

Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes.

(1) G est moyennable.

(2) G possède la propriété du point fixe.

Démonstration : Combinant [12] et le Théorème 2.2.L de [11]

Dans le paragraphe suivant, nous serons amenés à caractériser une classe de fonctions de $\mathcal{CB}(G)$ par le fait que, sur des ensembles de plus en plus larges (à l'infini) ces fonctions oscillent aussi peu que l'on veut.

Cette propriété est à mettre en rapport avec la suivante, qui permet de "construire" des moyennes invariantes.

Proposition III.1.16 (Mitchell)

Soit G un groupe moyennable discret et $S, T \subset G$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une moyenne invariante M , sur G , vérifiant

$$M(\chi_S) = 1 \quad \text{et} \quad M(\chi_T) = 0$$

est que pour tout ensemble fini $F \subset G$, il existe $1 \in G$

tel que $F_A \in S$ et $F_A \cap T = \emptyset$ où
est la fonction caractéristique de $A \subset G$ et $A_S = \{t, t \in G, t \in A\}$

Remarque : Ce résultat nous assure de l'existence de plusieurs moyennes invariantes sur les groupes discrets infinis moyennables.

Il a été démontré, en fait, dans un autre cadre l'existence de différents états invariants sur l'ensemble des fonctions bornées sur le groupe.

En dehors de quelques cas particuliers, (ex. les groupes commutatifs) on ne connaît pas l'existence de plusieurs moyennes pour des groupes localement compacts moyennables quelconques.

Démonstration : Voir [10].

1.9 Supposons que le groupe localement compact et moyennable G , agit de façon affine et homéomorphe sur un convexe compact K .

Les propriétés précédentes assurent que l'ensemble K_G des points fixes par l'action de G n'est pas vide.

G agit encore, par action biduale, sur l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur K . Pour la même raison, on est assuré de l'existence de mesures invariantes.

Si on note $\tilde{\mu}$ l'extension de Borel régulière d'une mesure de Radon invariante, on dira que $\tilde{\mu}$ est ergodique si

$$\forall A \subset S_{\mu} \quad \tilde{\mu}(A) = 1 \text{ ou } \tilde{\mu}(A) = 0$$

où S_μ est le $\mathbb{R}$ -clan des ensembles mesurables G -invariants

Il est bien connu (voir ex. [9]) que l'ensemble des mesures invariantes est un cône convexe dont l'intersection avec $M_1^+(K)$ est une base. Les points extrémaux de cette base sont les mesures ergodiques. La partie positive de ce cône est réticulée pour son ordre propre.

L'ensemble des mesures invariantes possède la propriété importante suivante :

$$\tilde{\nu} = \tilde{\mu} \text{ sur } S_{\mu+\nu} \Rightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}$$

Il est clair que toute mesure invariante représente un point invariant. Nous verrons que l'inverse n'est pas toujours vrai.

D'autre part un point fixe d'un convexe compact n'a pas toujours une mesure maximale invariante qui le représente.

En effet, étant donné que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_R(K), \forall s \in G \quad \text{on a} \quad \widehat{f \circ \Psi_s} = \widehat{f} \circ \Psi_s$$

il s'ensuit de la Proposition III.1 que l'action biduale de G sur $M_1^+(K)$ conserve la maximalité des mesures. D'autre part, si une mesure représente un point fixe de K , il en est de même pour ses translatés:

$$r(\mu) \in K_G \Rightarrow r(\mu \circ \Psi_s) = r(\mu) \quad \forall s \in G$$

L'ensemble des mesures maximales représentant un point fixe est donc un ensemble convexe, globalement invariant par G . Cet ensemble est compact pour la topologie dual de l'ensemble des

fonctions convexes et ses enveloppes concaves. Mais, d'après la Proposition III.1, l'action bidualle du groupe G sur $M_+^*(K)$ n'est continue pour cette topologie que dans le cas où K est un simplexe. Ce n'est donc que dans ce cas que l'on connaît l'existence d'une mesure maximale invariante représentant chaque point fixe (en utilisant le Théorème du point fixe). Mais dans ce cas un raisonnement direct donne aussi le même résultat.

Par contre, le même type d'argument assure l'existence de (au moins) une mesure invariante μ représentant chaque point fixe d'un convexe compact telle que

$$\text{Supp}(\mu) \subset \overline{E(K)}$$

REFERENCES (III.1)

- [1] E.M. ALFSEN
Compact Convex sets and boundary integrals, Springer, 1971
- [2] G. CHOQUET
Lectures on Analysis, W.A. Benjamin, 1969
- [3] G. MODOLSKY
Balayage défini par un cône convexe de fonctions numériques
sur un espace compact C.R.A. 5,254, 1962
- [4] G. CHOQUET
P.A. Meyer : Existence et unicité des représentations intégrales
dans les convexes compacts quelconques , Ann. Inst. Fourier
13, 139-154 (1963)
- [5] M. GOULLET de RUGY
Géométrie des simplexes, CDU, Paris 1968
- [6] M. ROGALSKY
Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 1967/68, n°2
- [7] E.M. ALFSEN
On the geometry of Choquet simplexes, Math. Scand. (1964) 97-110
- [8] E. STØRMER
On partially ordered vector spaces and their duals with applications
to simplexes and C^* -algebras Proc. London Math. Soc. (3) 18,
245-265 (1968)
- [9] R. PHELPS
Lectures on Choquet's theorem, Princeton, 1966
- [10] T. MITCHELL
"Constant functions and left invariant means on semigroups"
Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 244-261
- [11] F. GREANLEAF
Invariant Means on Topological Groups
Van Nostrand (1969).
- [12] N. RICKERT
Amenable Groups and Groups with Fixed Point Property
Preprint.

INVARIANT FACES OF A SIMPLEX

R. LIMA (x)

J. NAUDTS (xx)

Abstract : We consider the action of a locally compact amenable group
as affine homeomorphisms of a Choquet simplex Δ .
Theorem 4.2 characterises the extreme case the fixed
points of Δ form a face of Δ .

Février 1974

74/P.599

Postal address : Centre de Physique Théorique, CNRS,
31, chemin J. Aiguier 13274 MARSEILLE CEDEX2

(x) Attaché de Recherche au CNRS.

(xx) Universiteit Leuven. Institut voor Theoretische Fysica
Celestijnenlaan 200D, 3030 Herelee, Belgie.

1. Introduction

Let Δ be a convex compact subset of a locally convex Hausdorff space E . Denote $\mathcal{Y}(\Delta)$ the set of affine continuous one-to-one mappings $\psi: \Delta \rightarrow \Delta$. A representation $\{\psi_x, x \in G\}$ of a locally compact group G as affine homeomorphisms of Δ is a mapping $x \in G \mapsto \psi_x \in \mathcal{Y}(\Delta)$ which satisfies :

- if e is the neutral element of G then ψ_e is the identical mapping of Δ in itself.
- $\psi_x \psi_y = \psi_{xy}$ for any $x, y \in G$.
- the mapping $x \in G \mapsto \psi_x w$ is continuous on G for any point

Denote Δ_G the set of fixed points in Δ ; i.e. : $\Delta_G = \{w \in \Delta \mid \psi_x w = w, \text{ for any } x \in G\}$. Then Δ_G is a convex compact subset of Δ .

A convex subset F of Δ is called a face of Δ if for any $w \in F$ and for any $w_1, w_2 \in \Delta$, $\lambda \in]0, 1[$, such that $w = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2$ one has $w_1, w_2 \in F$ (see [1]). In this paper we study the case the set Δ_G of fixed points of Δ is a face of Δ . An example of this situation is mentionned in appendix B.

The main result (theorem 4.2) is derived under two restrictions. First we suppose the locally compact group G is amenable. By [2], § 3.3 the group G is amenable if and only if it has the fixed point property : for any representation of G in a convex compact set the set Δ_G of fixed point is non-empty. Further we need the convex compact set Δ is a Choquet simplex : any point $w \in \Delta$ is represented by a unique maximal measure μ_w on Δ . (See [1]).

The present work started after reading a paper by D. Ruelle ([3]) where the same problem is treated in the context of classical statistical mechanics of infinite lattice systems.

One of us (R. L.) thanks Professor F. Cerulus and A. Verbeure for their kind hospitality at the University of Leuven. The second author (J. N.) wishes to thank Professor D. Kastler and Professor A. Visconti for their kind hospitality at Marseille. We are indebted to E. Størmer for helpful discussion.

2. m-slowly oscillatory functions

Let G be a locally compact group. Denote $\mathcal{CB}(G)$ the space of bounded continuous complex functions on G . It is a C^* -algebra with norm :

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)| \quad \text{for any } f \in \mathcal{CB}(G)$$

We use the notion of mean on the group G in a restricted way : a mean on G is any state on the C^* -algebra $\mathcal{CB}(G)$ (and not e.g. on a sub C^* -algebra of $\mathcal{CB}(G)$). (See [4], p. 1 and 21).

Let ω be a state on a C^* -algebra $\mathcal{A}$. Let $A = A^* \in \mathcal{A}$. Then following Kadison and Singer ω is called definite on A if $\omega(A^2) = \omega(A)^2$. (See [4], Th. 4). This inspires the following :

Definition 2.1: Let M be a mean on a locally compact group G . A function $f \in \mathcal{CB}(G)$ is M -definite (or sharply M -measurable) if

$$M(f\bar{f}) = |M(f)|^2$$

Lemma 2.2 : A function $f \in \mathcal{CB}(G)$ is M -definite if and only if $M(fg) = M(f)M(g)$ for any $g \in \mathcal{CB}(G)$

Proof : One direction is immediate. The other direction follows from the Schwarz-inequality.

Hence a mean M on G is a character on $\mathcal{CB}(G)$ if and only if all functions in $\mathcal{CB}_M(G)$ are M -definite. The set of M -definite functions in $\mathcal{CB}(G)$ is a norm closed subalgebra of $\mathcal{CB}(G)$.

For any $x \in G$ and $f \in \mathcal{CB}(G)$ define $\tau_x f \in \mathcal{CB}(G)$ by $(\tau_x f)(y) = f(x^{-1}y)$ for any $y \in G$. A mean M on G is (left) invariant if $M(\tau_x f) = M(f)$ for any $x \in G$, $f \in \mathcal{CB}(G)$. The group G is amenable if there exists an invariant mean on G .

Lemma 2.3 : Let M be an invariant on the locally compact group G . Let $f \in \mathcal{CB}(G)$. Are equivalent :

- $M(\bar{f} \tau_x f) = M(\bar{f}f)$ for any $x \in G$,
- $M(|f - \tau_x f|) = 0$ for any $x \in G$.
- $M(f \tau_x g) = M(fg)$ for any $x \in G$, $g \in \mathcal{CB}(G)$.

Proof : $c) \Rightarrow a) \Rightarrow b)$ is immediate. $b) \Rightarrow c)$ follows from the Schwarz inequality.

We introduce :

Definition 2.4 : Let M be an invariant mean on a locally compact group G . A function $f \in \mathcal{CB}(G)$ is M -slowly oscillating if it satisfies one of the equivalent conditions of Lemma 2.3. It is m -slowly oscillating if it is M -slowly oscillating for any invariant mean M on G .

In appendix A a motivation is given for the name "slowly oscillating".

Remark that the set of invariant means M for which a function f is M -slowly oscillating is convex compact for the weak * -topology of the dual of $\mathcal{CB}(G)$.

Proposition 2.5 : Let M be an invariant mean on the locally compact group G . Let $f \in \mathcal{CB}(G)$

- a) if f is M -definite then f is M -slowly oscillating.
- b) Suppose M is extremally invariant. Then f is M -definite if and only if f is M -slowly oscillating.
- c) f is m -slowly oscillating if and only if f is M -definite for any extremally invariant mean on G .

Proof

a) is immediate

b) Suppose f is M -slowly oscillating. Let $\pi, \mathcal{H}, \xi$ be the G.N.S. - representation of $\mathcal{CB}(G)$ associated with M . Because M is extremally invariant and the algebra is commutative, the strongly convex hull

$$X = \overline{\text{conv}} \{ \pi(\tau_x f) \mid x \in G \}$$

contains a multiple $\lambda \mathbb{1}$ of the identity operator $\mathbb{1}$ on $\mathcal{H}$. (See e.g. [5])

For any element A in X one has $(A\xi, \xi) = M(f)$ and because f is M -slowly oscillating $(A\pi(\bar{f})\xi, \xi) = M(\bar{f}f)$. Taking $A = \lambda \mathbb{1}$ one obtains $\lambda = M(f)$ and $\lambda M(\bar{f}) = M(\bar{f}f)$. Hence $M(\bar{f}f) = |M(f)|^2$.

c) follows from b) and the Krein-Milman theorem.

Remark 2.6 :

Let G be a locally compact amenable group. A function is almost periodic on G if its orbit in $\mathcal{CB}(G); \{ \tau_x f \mid x \in G \}$ is relatively compact in the norm topology on $\mathcal{CB}(G)$. It is weakly almost periodic if its orbit is relatively compact in the weak topology on $\mathcal{CB}(G)$. On a weakly almost periodic function f all invariant means on G coincide. Denote $m(f)$ the mean value of f .

Any weakly almost periodic function f on G is the direct sum of an almost periodic function f_1 on G and a weakly almost periodic function f_2 on G which satisfies $m(|f_2|^2) = 0$; i.e. the function f_2 is m -slowly oscillating with zero mean. In particular an almost periodic function which is m -slowly oscillating is constant. (See [6], p. 30 Theorem 2.22)

3. Representation in a compact set.

Let K be a compact Hausdorff space. Denote $M_1^+(K)$ the set of probability measures on K . $M_1^+(K)$ is convex compact for the weak*-topology of the dual of $\mathcal{C}(K)$, the $\mathcal{C}^*$ -algebra of continuous complex functions on K .

Let G be a locally compact amenable group. Let $\{\varphi_x, x \in G\}$ be a representation of G in K ; i.e.

$\varphi_x: K \rightarrow K$ is continuous for any $x \in G$

φ_e is the identity map of K (e is the neutral element of G)

$\varphi_x \varphi_y = \varphi_{xy}$ for any $x, y \in G$

$x \mapsto \varphi_x w$ is continuous on G for any $w \in K$.

The measure $\mu \in M_1^+(K)$ is said to be invariant under the action of the group G if $\mu(f \circ \varphi_x) = \mu(f)$ for any $x \in G$, $f \in \mathcal{C}(K)$.

Lemma 3.1 : Let μ be an invariant measure on K . Are equivalent :

- any time $\mu = \lambda \mu_1 + (1-\lambda) \mu_2$ with $\lambda \in]0, 1[$, and $\mu_1, \mu_2 \in M_1^+(K)$ the measures μ_1 and μ_2 are invariant.
- for any f and $g \in \mathcal{C}(K)$ one has $\mu(f(g \circ \varphi_x)) = \mu(fg)$, $\forall x \in G$.

Proof : Let $\pi, \mathcal{H}, \xi$ be the G.N.S. representation of $\mathcal{B}(K)$ associated with μ . Because μ is invariant the dual action of G on $\mathcal{B}(K)$ is unitarily implemented in the representation π ; i.e. : there exists a unitary representation $\{U_x, x \in G\}$ of G on $\mathcal{H}$ which satisfies $\pi(f \circ \varphi_x) = U_x \pi(f) U_x^*$ for any $f \in \mathcal{B}(K), x \in G$.

Suppose now $\mu = \lambda \mu_1 + (1-\lambda) \mu_2$. Then by [7], p.35, prop. 2.5.1, there exists a positive operator A in $\pi(\mathcal{B}(K))''$ such that $\mu_1(f) = (\pi(f) \xi, A \xi)$ for any $f \in \mathcal{B}(K)$. Hence μ_1 is invariant if and only if the vector $A \xi$ is invariant under the representation $\{U_x, x \in G\}$. On this way one sees condition a) is fulfilled if and only if the representation $\{U_x, x \in G\}$ is trivial; i.e. : $U_x = \mathbb{1}$, for any $x \in G$.

On the other hand condition b) can be written as

$$(\pi(f) U_x \pi(g) \xi, \xi) = (\pi(f) \pi(g) \xi, \xi) \quad \text{for any } f, g \in \mathcal{B}(K), x \in G.$$

Because the vector ξ is cyclic this is equivalent with $U_x = \mathbb{1}$, for any $x \in G$.

For any $w \in K$ denote Γ_w the closed orbit of w in K :

Let M be a mean on G . Let $w \in K$. Define a measure $\mu_w^M \in M_1^+(K)$ by:

$$\mu_w^M(f) = M(x \mapsto f(\varphi_x w)) \quad \text{for any } f \in \mathcal{B}(K).$$

Remark that the support of μ_w^M is contained in Γ_w .

Definition 3.2 : Let $K, \{\varphi_x, x \in G\}$ be as above. Let M be a mean on G . A point $w \in K$ is said to be M -definite (resp. M -slowly, m -slowly oscillating) if for any $f \in \mathcal{B}(K)$ the function $x \in G \mapsto f(\varphi_x w)$ is M -definite (resp. M -slowly, m -slowly oscillating).

The following two lemma's justify this definition :

Lemma 3.3 : Let $w \in K$. Let M be a mean on G . Then w is M -definite if and only if the measure μ_w^M is a Dirac measure.

Proof : μ_w^M is a Dirac measure if and only if for any $f \in \mathcal{B}(K)$:

$$\mu_w^M(f \bar{f}) = |\mu_w^M(f)|^2$$

which is equivalent with $M(x \mapsto |f(\varphi_x w)|^2) = |M(x \mapsto f(\varphi_x w))|^2$

which means $x \mapsto f(\varphi_x w)$ is M -definite.

Lemma 3.4 : Let $\omega \in K$. Let M be an invariant mean on G . Are equivalent:

- a) ω is M -slowly oscillating
- b) for any convex decomposition $\mu_\omega^M = \lambda \mu_1 + (1-\lambda) \mu_2$, $\lambda \in]0,1[$
 $\mu_1, \mu_2 \in M_1^+(K)$ the measures μ_1 and μ_2 are invariant
under the action of the group G on K .

Proof

ω is M -slowly oscillating if and only if for any $f, g \in \mathcal{C}(K)$, $x \in G$ one has $\mu_\omega^M(fg) = \mu_\omega^M(f(g \circ \psi_x))$. Hence this lemma follows from lemma 3.1

Following two lemma's are essential :

Lemma 3.5 : Let $\omega \in K$. The mapping $\gamma_\omega: M \rightarrow \mu_\omega^M$ with domain the set of means M on G is affine continuous for the weak * -topologies of the duals of $\mathcal{CB}(G)$ resp. $\mathcal{C}(K)$. The range of γ_ω is the set of all measures in $M_1^+(K)$ with support in Γ_ω .

Proof :

The mapping γ_ω clearly is affine continuous with range in the measures with support in Γ_ω . Let $\mu \in M_1^+(K)$. Suppose the support of μ is contained in Γ_ω . Denote B the subset of $\mathcal{CB}(G)$:

$$B = \{ \tilde{f} \in \mathcal{CB}(G) ; \exists f \in \mathcal{C}(K) \rightarrow \tilde{f}(x) = f(\psi_x \omega) \forall x \in G \}$$

Then B is a subalgebra of $\mathcal{CB}(G)$ which satisfies : $1 \in B$ and $(g \in B \Rightarrow \bar{g} \in B)$. Define a positive linear functional M on B by :

$$M(x \in G \mapsto f(\psi_x \omega)) = \mu(f)$$

M is well defined because if $f, f' \in \mathcal{C}(K)$ with $f(\psi_x \omega) = f'(\psi_x \omega)$ for any $x \in G$ then $f = f'$ on Γ_ω and hence $\mu(f) = \mu(f')$

One has $M(1) = 1$. By [7], 2.10.1, M can be extended into a state on $\mathcal{CB}(G)$ which again we denote M . One has clearly $\mu = \mu_\omega^M$. Hence μ is in the range of γ_ω .

Lemma 3.6 : Let $\omega \in K$. Let $\mu \in M_1^+(K)$ with support in Γ_ω . Suppose μ is invariant for the action of G on K . There exists an invariant mean M on G for which $\mu = \mu_\omega^M$.

Proof :

The set of all means M on G for which $\mu = \mu_\omega^M$ is convex compact and non-empty by foregoing lemma. Moreover this set is invariant under the action of the group G . Because G has the fixed point property ([2], p.49, 3.3) this set contains at least one invariant element.

Theorem 3.7 : Let $\{\psi_x, x \in G\}$ be a representation of an amenable locally compact group G in a compact Hausdorff space K (in the sense defined in the beginning of this section). Let $\omega \in K$. Are equivalent :

- a) ω is m -slowly oscillating
- b) the invariant measures on K with support in Γ_ω form a closed face of $M_1^+(K)$.

Proof : follows from lemma's 3.4 and 3.6.

Remark 3.8 : It is clear from the previous theorems that the closed orbit of any point $\omega \in K$ contains a fixed point if and only if ω is M -definite for some invariant mean M on G .

Remark 3.9 : Recall we say, following Mackey, [10], that a group G acts regularly on K iff any ergodic measure has support in the closure of the orbit of a point of K . By [11] p.29 this condition is always fulfilled if K is metrisable. Further we say that G acts quasi-regularly on K iff. for each ergodic measure on K , there exists a point $\omega \in K$ such that

$$\text{support}(\mu) \subset \overline{\text{conv}} \{\Gamma_\omega\}$$

where $\overline{\text{conv}}$ is for the convex closure.

4. Representations in a convex compact set.

Let G be a locally compact amenable group. Let Δ be a convex compact subset of a locally convex Hausdorff space E . Let $\{\varphi_x, x \in G\}$ be a representation of G as affine homeomorphisms of Δ . (See introduction). Δ_G denotes the set of fixed points of Δ .

Lemma 4.1 : Are equivalent :

- a) Δ_G is a face of Δ .
- b) Any measure $\mu \in M_1^+(\Delta)$ representing a point of Δ_G has support in Δ_G .
- c) Any measure $\mu \in M_1^+(\Delta)$ representing a point of Δ_G is invariant.

Proof :

For the equivalence of a) and b) see [1], p.48, Prop.5. 19.

b) $\Rightarrow$ c) is trivial.

c) $\Rightarrow$ a).

Let $\rho \in \Delta_G$. Suppose $\rho = \lambda \omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$, $\lambda \in]0,1[$, $\omega_1, \omega_2 \in K$. Let μ_1 and μ_2 be the Dirac measures representing ω_1 resp. ω_2 . Then by c) the measure $\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ is invariant. In particular the support $\{\omega_1, \omega_2\}$ of this measure is invariant under the action of G . For the same reason the set $\{\lambda^2 \omega_1 + (1-\lambda^2)\omega_2, \omega_2\}$ is an invariant subset of Δ . We conclude $\omega_2 \in \Delta_G$.

Theorem 4.2 : Let Δ be a simplex. Let $\{\varphi_x, x \in G\}$ be a representation of a locally compact amenable group G as affine homeomorphisms of Δ .

Are equivalent :

- a) the set Δ_G of fixed points of Δ is a face of Δ .
- b) the invariant measures on Δ form a face of $M_1^+(\Delta)$.
- c) any point $w \in \Delta$ is m -slowly oscillating, and G acts regularly on Δ .

Proof:

a) $\Rightarrow$ b)

The mapping $\mu \mapsto r(\mu)$ which maps any measure $\mu \in M_1^+(\Delta)$ into the point $r(\mu) \in \Delta$ represented by μ is affine. By lemma 4.1 any measure

in the inverse image of Δ_G through this mapping is invariant. Because the inverse image of a face through an affine mapping is a face b) follows.

b) $\Rightarrow$ a)

From b) follows the invariant maximal measures form a face in the convex set of maximal measures on Δ . Because a maximal measure on the simplex Δ is invariant if and only if the represented point is invariant and because the mapping $\omega \in \Delta \rightarrow \hat{\mu}_\omega \in M_1^+(\Delta)$, the maximal measure representing ω , is affine there follows Δ_G is a face of Δ . The equivalence of b) and c) follows from theorem 3.7. and regular action of G .

Remark 4.3 : The supposition Δ is a simplex in foregoing theorem only is used to prove implication b) $\Rightarrow$ a). An example given in Appendix B shows b) $\Rightarrow$ a) does not hold for any compact convex set.

Remark 4.4 : We can see that the three conditions of theorem 4.2 are also equivalent to the following (d) (resp. e). Any point $\omega \in \Delta$ is m -slowly oscillating and G acts quasi-regularly on K (resp. on $\mathcal{E}(\Delta)$).

Proof :

Clearly (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e). Now (a) is equivalent to the fact that the set $\hat{M}^G$ of invariant maximal (in the sense of Choquet) probability measures on Δ be a face of the set $\hat{M}$ of all maximal probability measures on Δ .

Let μ be an extremal element of $\hat{M}^G$. Because $\hat{M}$ is a face of the set of all probability measures, μ is ergodic with support in $\overline{\mathcal{E}(\Delta)}$ (by maximality).

From (e) it follows that

$$\text{support } (\mu) \subset \overline{\mathcal{E}(\Delta)} \cap \overline{\text{conv}} (\Gamma_\omega) \subset \Gamma_\omega$$

where Γ_ω is the closure of the orbit of ω and $\overline{\text{conv}}$ is for the convex closure. Therefore μ is a Dirac measure again by Thm. 3.7 and because $\hat{M}$ is a face of the set of all probability measures on Δ . It follows that $\hat{M}^G$ is a face by straightforward argument.

APPENDIX A

Let G be an infinite discrete group. Suppose G is amenable.
Define a class $\mathcal{Y}$ of subsets of G by :

Definition A.1 : A subset S of G belongs to $\mathcal{Y}$ if for any finite subset K of G there exists an $x \in G$ such that $xK \subset S$
($xK \equiv \{xy \mid y \in K\}$)

Proposition A.2 : Let f be a bounded real function on G . Let $\lambda \in \mathbb{R}$
For any $\epsilon > 0$ denote $S_\epsilon = \{x \in G \mid |f(x) - \lambda| < \epsilon\}$.

Are equivalent :

- there exists an invariant mean M on G such that $M(f) = \lambda$ and such that f is M -definite
- $S_\epsilon \in \mathcal{Y}$ for any $\epsilon > 0$
- λ belongs to the closure of the set $\{\tau_x f \mid x \in G\}$ for the topology of pointwise convergence on $\mathcal{CB}(G)$.

Proof

The equivalence of b) and c) is straight forward.

a) $\Rightarrow$ b)

Let $\epsilon > 0$. Let χ_1 and χ_2 be the characteristic functions of the sets $\{x \in G \mid f(x) \geq \lambda + \epsilon\}$ resp. $\{x \in G \mid f(x) \leq \lambda - \epsilon\}$.

One has $\chi_1 f - (\lambda + \epsilon) \chi_1 \geq 0$. Hence $M(\chi_1 (f - \lambda - \epsilon)) \geq 0$. But $M(\chi_1 f) = \lambda M(\chi_1)$ by condition a). Hence $-\epsilon M(\chi_1) \geq 0$. This implies

$M(\chi_1) = 0$. In the same way one shows $M(\chi_2) = 0$. It follows

now from [2], p. 91, lemma A.1.2, that $S_\epsilon \in \mathcal{Y}$.

b) $\Rightarrow$ a)

Let $\epsilon > 0$. Denote χ_ϵ the characteristic function of the set S_ϵ .

By [2], p. 91, lemma A. 1.2, there exists an invariant mean M on which satisfies $M_\epsilon(\chi_\epsilon) = 1$. The family $\{M_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ contains a w^* -converging subnet if ϵ tends to zero. Let $M = w^*\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_{\epsilon_n}$. Because $\|\chi_{\epsilon_n}(f - \lambda)\| \leq \epsilon_n$ one obtains $|M_\epsilon(f) - \lambda| < \epsilon$ and hence $M(f) = \lambda$.

Let g be a bounded positive function on G . Then $|M_\epsilon(fg) - \lambda M_\epsilon(g)| = |M_\epsilon(\chi_\epsilon(f - \lambda g))| \leq M_\epsilon(g)$. Hence $M(fg) = \lambda M(g)$. This shows f is M -definite.

Foregoing proposition gives on an explicit way a characterisation of M -definite functions using the result of [2]. In the general situation we obtain the following :

Proposition A.3 : Let G be a locally compact amenable group. Let $f \in \mathcal{CB}(G)$. Let $\lambda \in \mathbb{R}$. Are equivalent

- a) there exists an invariant mean M on G for which f is M -definite and one has $M(f) = \lambda$.
- b) the constant λ belongs to the closure of the set $\{\tau_x f | x \in G\}$ for the topology of point-wise convergence on $\mathcal{CB}(G)$.

Proof

Let K be the closure of $\{\tau_x f | x \in G\}$ for the topology of point-wise convergence on $\mathcal{CB}(G)$. Then K is compact for this topology. The proposition now follows from lemma's 3.3 and 3.5.

Definition A.4 : A sequence $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ of real numbers is slowly oscillating if for any $\epsilon > 0$ there exists an $N \in \mathbb{N}$ and a $\delta > 0$ such that for all $n, m > N$ with $n \leq m \leq n(1+\delta)$ one has $|x_n - x_m| < \epsilon$.

(See eg. [8])

Lemma A.5 : Let f be a bounded real function on $\mathbb{Z}$. Suppose the sequences $f(n), n \in \mathbb{N}$ and $f(-n), n \in \mathbb{N}$ are slowly oscillating. Then the function f is m -slowly oscillating.

Proof

Let $m \in \mathbb{N}$. Then $|f^2(n) - f(n)f(n-m)| \leq \|f\| |f(n) - f(n-m)| < \epsilon \|f\|$ if $|n|$ is large enough. Hence $M(f^2 - f \tau_m f) = 0$ for any invariant mean M on G . This proves f is m -slowly oscillating.

Define a function f on $\mathbb{Z}$ by :

$$f(n) = 1 \text{ if } \exists a \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |n| = 10^a$$
$$f(n) = 0 \text{ otherwise.}$$

Then the function f is m -slowly oscillating but not slowly oscillating.

APPENDIX B

In this appendix two examples are considered.

Let $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$ denote the real line resp. the set of integers. Consider $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ provided with the product topology. Define $\Delta \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ by :

$$\Delta = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \geq 0 \text{ for any } n \in \mathbb{Z} \text{ and } \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \leq 1 \right\}$$

Then Δ is the direct sum in the sense of [9], p. 18.04 of the trivial simplexes $\{1\}$ in each copy of $\mathbb{R}$. Hence Δ is a compact simplex. The extremal points of Δ are $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$ and $\{x_n = \delta_{n,p}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ for any $p \in \mathbb{Z}$. (See [9]). In particular it follows Δ is a Bauer simplex.

Define a linear operator $T: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ by $T(x_n)_n = (x_{n-1})_n$. Then T is a invertible affine continuous mapping of Δ in itself. The only fixed point of Δ is $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$. Hence an example is yield of a Bauer simplex Δ and a group of affine homeomorphisms of Δ (the powers of T) for which the fixed points form a face.

The following examples show theorem 4.2 is not valid for an arbitrary convex compact set.

Let $L^2(\mathbb{R})$ be the Hilbert space of square integrable functions on $\mathbb{R}$. Let $\{U_x, x \in \mathbb{R}\}$ be the unitary representation of $\mathbb{R}$ on $L^2(\mathbb{R})$ defined by $(U_x \varphi)(y) = \varphi(y-x)$ for any $x, y \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Let Δ be the unit ball of $L^2(\mathbb{R})$:

$$\Delta = \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_2 \leq 1 \}$$

Then Δ is convex compact set for the weak topology on $L^2(\mathbb{R})$. The unitary operators $\{U_x, x \in \mathbb{R}\}$ define a continuous representation of $\mathbb{R}$ as affine homeomorphisms of Δ . Hence all conditions of theorem 4.2 are fulfilled except Δ is not a simplex.

For any $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ the function $x \in \mathbb{R} \mapsto (U_x \varphi, \psi)$ vanishes at infinity. Hence by the Stone-Weierstrass theorem any point of Δ is m -slowly oscillating. But the only fixed point of Δ is the origin of $L^2(\mathbb{R})$ which is not extremal in Δ .

REFERENCES

- [1] A. Goullet de Rugy : Géométrie des Simplexes; CDU, Paris 1968
- [2] F.P. Greenleaf, Invariant Means on Topological Groups; Van Nostrand Mathematical Studies 16 (1969)
- [3] D. Ruelle : On the use of "small external fields" in the Problem of Symmetry Breakdown in Statistical Mechanics; Ann. of Phys. 69, 364-374 (1972)
- [4] R.V. Kadison and I.M. Singer : Extensions of Pure States; Amer. J. Math. 81, 383-400 (1959)
- [5] Kovacs, I. and Szücs, J. Ergodic type theorems in Von Neumann algebras. Acta Sc. Math. 27 (1966), 233
- [6] R.B. Burkel : Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups; Gordon and Breach (1970)
- [7] J. Dixmier : Les C^* algebras; Gauthier-Villars, Paris (1964)
- [8] A. Peyerinhoff : Lectures on Summability; Lecture Notes in Mathematics n° 107, Springer-Verlag
- [9] A. Goullet de Rugy, C. Schol-Cancelier, B. Taylor-Mac Gibbon; Séminaire Choquet 1970-71.
- [10] G.M. Mackey, Unitary representations of Group Extensions I; Acta Math. t.99, 1958,p.265-311
- [11] E. Hopf, Ergodentheorie, J. Springer, Berlin, 1937.

III. COMPLEMENTS

Soit Δ un simplex (de Choquet) dans un espace localement convexe, Hausdorff E . Soit G une groupe localement compact et moyennable comme auparavant.

Soit φ une application de G dans le groupe des homeomorphismes affines de Δ vérifiant les propriétés de continuité comme auparavant et Δ_G l'ensemble des points fixes par G de Δ .

Nous pouvons donner ici une version plus complète du théorème de la brisure de symétrie.

Notons que, en général l'ensemble des mesures qui représentent les points de Δ_G contient comme sous-ensemble celui des mesures invariantes. Le théorème 4.4 de la section précédente montre que ces deux ensembles coïncident si et seulement si Δ_G est une face de Δ .

Par contre il est clair que les intersections de ces deux ensembles avec celui des mesures maximales coïncident toujours.

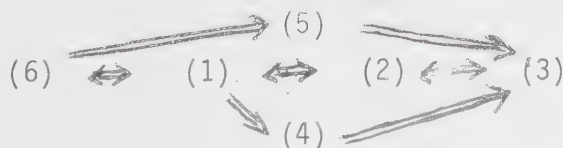
Nous avons alors le

Théorème III.3.1 :

Soit Δ un simplexe G et Δ_G comme auparavant. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) Δ_G est une face de Δ .
- (2) L'ensemble des mesures de probabilité maximales invariantes est une face dans l'ensemble des mesures maximales sur Δ .
- (3) L'ensemble des mesures de probabilité maximales invariantes est une face de l'ensemble des mesures de probabilité sur Δ .
- (4) L'ensemble des mesures de probabilité avec barycentre invariant est une face dans l'ensemble des mesures de probabilité sur Δ .
- (5) L'ensemble des mesures de probabilité invariantes est une face de l'ensemble de mesures de probabilité sur Δ .
- (6) Toute mesure de probabilité ayant un barycentre invariant est invariante.

Démonstration : Nous démontrons ces équivalences comme suit :



Donc :

(1) $\Leftrightarrow$ (2) car l'application $\mu \mapsto r(\mu)$ de l'ensemble des mesures de probabilité maximales dans Δ , qui associe à chaque mesure son barycentre est une bijection affine. Il suffit de remarquer que l'image inverse par une application affine d'une face est une face.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) car l'ensemble des mesures de probabilité maximales est toujours une face de l'ensemble des mesures de probabilité sur Δ ; et d'une façon évidente si $F_1 \subseteq F \subseteq \Delta$ et F est une face de Δ , alors F_1 est une face de F si et seulement si F_1 est une face de Δ .

(1) $\Rightarrow$ (4) car l'application $\mu \mapsto r(\mu)$ de l'ensemble des mesures de probabilité dans Δ , $r(\mu)$ étant le barycentre de μ est aussi affine.

(4) $\Rightarrow$ (3) car l'intersection de deux faces est une face.

(1) $\Rightarrow$ (6) d'après (1) toute mesure de probabilité ayant barycentre dans Δ_G a support Δ_G (cet ensemble étant une face fermée) et donc est invariante.

(6) $\Rightarrow$ (1) si (1) n'est pas vraie alors il existe $g \in \Delta_G$ tel que

$$g = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \quad \text{où } w_1, w_2 \notin \Delta_G$$

Comme nous pouvons toujours choisir $\lambda \neq 1/2$ il existe $g \in G$ tel que $w_1 \neq \psi_g w_2$ et donc $w_1 \neq w_2$, $w_1 \neq \psi_g w_1$ et $w_1 \neq \psi_g w_2$. Il existe alors une fonction continue sur Δ (lemme de Urysohn) tel que

$$f(w_1) = 1 \quad \text{et} \quad f(w_2) = f(\psi_g w_1) = f(\psi_g w_2) = 0$$

Il est alors clair que la mesure $\lambda \delta_{w_1} + (1-\lambda) \delta_{w_2}$ a comme barycentre g mais n'est pas invariante, comme on le vérifie sur f et $\psi_g f$

(6) $\Rightarrow$ (5) car (5) résulte facilement de (6) et (4).

(5) $\Rightarrow$ (3) car l'intersection de deux faces est encore une face.

Nous sommes donc amenés à étudier en détail la structure des faces invariantes dans un simplexe de Bauer, plus précisément de $M_1^+(\Delta)$.

Ceci est l'objet des théorèmes qui suivent.

Tout d'abord quelques

Notations :

Soit K un sous-ensemble compact de Δ . Nous noterons $M_1^+(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité à support dans K . Si K est (globalement) invariant, i.e. $\forall g \in G, K \subset K$, nous noterons $M_1^+(K)^G$ l'ensemble des mesures invariantes dans $M_1^+(K)$. Si $N \subset M_1^+(K)$ nous noterons

$$\overline{\text{conv}}(N)$$

la fermeture pour la topologie vague de l'enveloppe convexe de N .

Notons d'abord que, d'après un théorème classique (voir ex[20]), on a

$$M_1^+(\Delta) = \overline{\text{conv}}(\mathcal{D})$$

où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des mesures de Dirac dans les points de Δ .

Si $w \in \Delta$, nous noterons comme auparavant Γ_w la fermeture (pour la topologie de E restreinte à Δ) de l'orbite de w .

Nous avons le théorème suivant :

Théorème III.3.2

Soit K un compact invariant de Δ . Alors

$$M_1^+(K) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{W \in K} M_1^+(K)$$

Démonstration : D'après le lemme précédent le membre de gauche est une face fermée du simplexe de Bauer $M_1^+(K)$. Le membre de droite est aussi une face fermée de ce simplexe par le théorème de Størmer ([5]). D'après la remarque fait plus haut nous avons

$$M_1^+(K) \supseteq \overline{\text{conv}} \bigcup_{W \in K} M_1^+(\pi_W)$$

Le résultat est alors une conséquence du fait que les points extrémaux de la face à gauche sont contenus dans la face à droite.

Nous donnons aussi, pour être complets, les indications pour la démonstration d'un lemme qui se trouve implicitement dans [5].

Lemme III.3.3. (Phelps)

Soit $\mu \in M_1^+(\Delta)$. La plus petite face fermée F_μ de $M_1^+(\Delta)$ qui contient μ est

$$F_\mu = M_1^+(\text{Supp } \mu)$$

Démonstration : (indications) : il est évident que l'on a

$$F_\mu \subseteq M_1^+(\text{Supp } \mu)$$

L'inclusion inverse se démontre utilisant le fait que si

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) \text{ avec } \mu(f) = \sup_K f \Rightarrow f \text{ constante}$$

alors $\text{Supp } (\mu) = K$

A partir de ce lemme nous pouvons arriver au

Théorème III.3.4

Soit μ une mesure invariante de $M_1^+(\Delta)$. Alors

$$F_\mu = \overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in K} M_1^+(\Gamma_w)$$

où F_μ est la plus petite face fermée contenant μ et $K = \text{Support } \mu$

Démonstration : Le membre de droite est une face fermée de $M_1^+(\Delta)$. Les points extrémaux de F_μ qui sont les mesures de Dirac δ_w , $w \in K$, (d'après le lemme précédent et la remarque) sont dans le membre de droite donc

$$F_\mu \subseteq \overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in K} M_1^+(\Gamma_w)$$

Par ailleurs, d'après un corollaire du théorème de Krein-Milmann (voir ex [20]), on a

$$\mathcal{E}(\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in K} M_1^+(\Gamma_w)) \subseteq \{\delta_x : x \in \overline{\bigcup_{w \in K} \Gamma_w}\}$$

L'invariance de μ assure alors que $x \in K$, $\forall x \in \overline{\bigcup_{w \in K} \Gamma_w}$ et les propriétés habituelles des simplexes de Bauer achèvent la démonstration.

Concluons cette scène avec le

Théorème III.3.5

La condition nécessaire et suffisante pour que $M_1^+(\Delta)^G$ soit une face est que

$$M_1^+(\Delta)^G = M_1^+(\Delta)^G$$

Démonstration : La condition est évidemment suffisante parce que $M_1^+(\Delta_G)$ est toujours une face de $M_1^+(\Delta)$

La condition est aussi nécessaire parce que les mesures de Dirac de $M_1^+(\Delta)^G$ sont les $\delta_x \delta_x$, $x \in \Delta_1$. Si cet ensemble est une face (fermée), ayant les mêmes points extrémaux que $M_1^+(\Delta_G)$ les deux ensembles coïncident.

Pour aller plus loin dans la connaissance de la structure des faces invariantes d'un simplexe de Bauer nous utiliserons la notion de point oscillant lentement à l'infini en moyenne (m-slowly oscillating) comme ceci a été fait dans les paragraphes précédents.

Le premier théorème caractérise, en termes de faces d'un simplexe de Bauer, la propriété d'oscillation lente à l'infini en moyenne.

Théorème III.3.6

Soit Δ un convexe compact dans un espace localement convexe et Hausdorff E et $w \in \Delta$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$M_1^+(\Gamma_w)^G = M_1^+(\Gamma_w \cap \Delta_G)$$

est que w soit un point oscillant lentement à l'infini en moyenne (m-slowly oscillating).

Démonstration : Si w oscille lentement à l'infini en moyenne alors $M_1^+(\Gamma_w)^G$ est une face dans $M_1^+(\Gamma_w)$ qui n'est pas vide. Dans ce cas l'ensemble de ces points extrémaux est exactement

$$\{\delta_w, w \in \Gamma_w \cap \Delta_G\}$$

Ceci prouve que la condition est suffisante.

La condition est nécessaire car $M_1^+(\Gamma_w \cap \Delta_G)$ est toujours une face.

Utilisant le théorème précédent et le théorème de Størmer sur les faces fermées des simplexes de Bauer nous pouvons maintenant caractériser la structure des mesures invariantes dans $M_1^+(\Delta)$.
Ainsi le

Théorème III.3.7

Soit Δ un convexe compact dans un espace localement convexe et Hausdorff E et μ une mesure invariante de Δ .
La condition nécessaire et suffisante pour que

$$M_1^+(\text{Supp } \mu \cap \Delta_G) = \overline{\bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G}$$

est que tous les points de support μ oscillent lentement à l'infini en moyenne.

Démonstration : Si chaque point $w \in \text{Supp } \mu$ oscille lentement à l'infini en moyenne, alors chaque $M_1^+(\Gamma_w)^G$ est une face de $M_1^+(\Gamma_w)$ d'après le théorème précédent et le membre de droite est une face fermée par le théorème de Størmer. L'égalité des deux ensembles résultent alors d'une comparaison de ses points extrémaux.

Nous remarquons seulement que d'une part

$$\bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G \subset \overline{\bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} \Gamma_w}$$

d'après un corollaire du théorème de Krein-Milman et que, d'autre part

$$\overline{\bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} \Gamma_w} \subset \text{Supp } \mu$$

Nous avons donc démontré que la condition est suffisante.

Supposons maintenant l'existence d'un $w \in \text{Supp } \mu$ ne vérifiant pas la propriété de l'énoncé, alors la plus petite

face fermée contenant $M_1^+(\Gamma_w)^G$ contient des mesures non in-variantes.

Il est donc de même de la plus petite face fermée contenant

$$\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G$$

et on a alors

$$M_1^+(\text{Supp } \mu \cap \Delta_G) \not\subseteq \overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G$$

ce qui montre que la condition est nécessaire.

Nous avons aussi le résultat suivant :

Corollaire III.3.8

Soit Δ un ensemble convexe compact dans un espace localement convexe et Hausdorff E , G et Δ_G comme auparavant.

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$M_1^+(\Delta_G) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \Delta} M_1^+(\Gamma_w)^G$$

est que tous les points de Δ oscillent lentement à l'infini en moyenne.

Démonstration : Ceci résulte de l'égalité suivante

$$M_1^+(\Delta_G) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{\mu \in M_1^+(\Delta)^G} (\text{Supp } \mu \cap \Delta_G)$$

et du théorème précédent.

L'égalité ci-dessus est une conséquence du théorème de Størmer.

Nous terminons cette série avec le résultat suivant.

Théorème III.3.9

Soit Δ un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel topologique E .

Soit μ une mesure invariante de $M_1^+(\Delta)$ et supposons que tous les points de son support oscillent lentement à l'infini en moyenne.

Les six conditions qui suivent sont équivalentes :

- (1) $F_\mu \subset M_1^+(\Delta)^G$
- (2) $\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G = \left[\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w) \right]^G$
- (3) $\mu \in \overline{\text{conv}} M_1^+(\Gamma_w)^G$
- (4) $F_\mu = \overline{\text{conv}} M_1^+(\Gamma_w)^G$
- (5) $F_\mu = M_1^+(\text{Supp } \mu \cap \Delta_G)$
- (6) $\text{Supp } \mu \subset \Delta_G$

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : la condition (1) entraîne que

$$F_\mu = \left[\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w) \right]^G$$

et pour démontrer (2) il suffit de remarquer qu'il s'agit de deux faces fermées d'un simplexe de Bauer ayant comme points extrémaux les mesures de Dirac invariantes à support dans le support de

(2) $\Rightarrow$ (3) : car d'après le théorème III.3.4 on a toujours

$$\mu \in \left[\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w) \right]^G$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : car l'ensemble $\overline{\text{conv}} \bigcup_{w \in \text{Supp } \mu} M_1^+(\Gamma_w)^G$ est une face

fermée dans $M_1^+(\Delta)$ d'après le théorème III.3.9 et F_μ est la plus petite face fermée contenant μ . L'inclusion inverse résulte du théorème III.3.4.

(4) $\Rightarrow$ (5) : est une conséquence du théorème III.3.9.

(5) $\Rightarrow$ (6) résulte du lemme III.3.3.

(6) $\Rightarrow$ (1) résulte aussi du lemme III.3.3 et du fait que $M_1^+(\Delta_a)$ est toujours une face dans $M_1^+(\Delta)$.

Nous terminons cette partie avec quelques remarques et un théorème permettant de conclure, dans certains cas que $\Delta = \Delta_a$.

Il est connu (voir ex. [1]) que toute face fermée F d'un simplexe Δ est complémentable ("split face"). Ceci veut dire que l'on peut toujours lui associer une face F' vérifiant les propriétés suivantes (pour ces propriétés ainsi que pour certaines des propriétés qui seront utilisées par la suite dans cette partie, on peut se référer à [1], [2], [6] par exemple):

A. F' est la plus grande face de Δ , disjointe de F

B. $\mathcal{L}(F') = \mathcal{L}(\Delta \setminus F)$

C. $\Delta = \text{conv}(F \cup F')$

D. Tout point w de $\Delta \setminus F$ s'écrit de façon unique

$$w = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \quad \lambda \in [0,1], w_1 \in F, w_2 \in F'$$

La fonction $\psi : \Delta \rightarrow [0,1]$ définie à partir de la décomposition ci-dessus par :

$$\varphi(w) = \lambda$$

est affine et semi-continue supérieurement. L'application "projection sur F' ",

$$p' : \Delta \setminus F \rightarrow F'$$

définie à l'aide de la décomposition ci-dessus par :

$$p'w = w_2$$

est borélienne (de quasi-première classe^{*}).

E. On a la relation suivante (cf. [19] Prop. II.6.5)

$$\varphi(w) = 1 - \hat{\chi}_F(w)$$

où $\hat{\chi}_F$ est l'enveloppe supérieure de la fonction caractéristique de F .

Nous pouvons maintenant énoncer le

* Soient X, Y deux espaces topologiques et $P: X \rightarrow Y$ et f une application. On dit que f est borélienne de quasi-première classe si, pour tout ouvert O de Y on a :

$$f^{-1}(O) = \bigcup_n (O_n \cap F_n)$$

où, $\forall n$, O_n (resp. F_n) est un ouvert (resp. fermé) de X . Si, $\forall n$, O_n peut être pris un F_σ (ex. si X est métrisable) alors f est dite de première classe.

Théorème III.3.12

Soit Δ un simplexe et supposons que Δ_G est une face de

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\Delta = \Delta_G$

(2) La fonction ψ , définie plus haut, est continue.

(3) L'application P' , définie plus haut, est continue.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) : évident.

(2) $\Rightarrow$ (1) car alors la face complémentaire de Δ_G

$$\Delta'_G = \psi^{-1}(1)$$

est fermée.

Il s'ensuit de la propriété E. ci-dessus que ψ est une fonction invariante et donc

$$\psi_g \Delta'_G \subset \Delta'_G, \quad \forall g \in G$$

Le théorème du point fixe assure alors une intersection non vide

$$\Delta_G \cap \Delta'_G, \text{ ce qui est contradictoire avec la propriété}$$

A. ci-dessus.

(1) $\Rightarrow$ (3) : évident.

(3) $\Rightarrow$ (1) car si P' est continue, $\Delta'_G = \{\omega \in \Delta \setminus F; P'\omega = \omega\}$ est un fermé de $\Delta \setminus F$. Il s'ensuit que

$$\overline{\Delta'_G} \cap \Delta \setminus F = \emptyset$$

Supposons maintenant que

$$\overline{\Delta'_G} \cap \Delta_G \neq \emptyset$$

et soit $w \in \overline{\Delta'_G} \cap \Delta_G$ et $w_1 \in \Delta'_G$. Alors

$\frac{1}{2}(w_1 + w) \in \Delta \setminus (\Delta_G \cup \Delta'_G)$ et comme Δ'_G est convexe on a
aussi $\frac{1}{2}(w_1 + w) \in \Delta'_G$ ce qui est absurde.

Nous concluons donc $\Delta'_G = \overline{\Delta'_G}$ et la démonstration s'achève de la même façon que (2) $\Rightarrow$ (1).

REFERENCES (III.3)

Se reporter aux références (III.1), page III.18 .

PARTIE IV

BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE
=====

1. INTRODUCTION

La structure géométrique de l'ensemble des états d'équilibre permet, au moins dans le cas des systèmes sur un réseau, d'utiliser les résultats précédents. Soit $\varphi \mapsto \text{Aut}(a)$ un homomorphisme d'un groupe G dans le groupe d'automorphismes d'une C^* -algèbre

1.1 Il est, tout d'abord, intéressant de savoir si l'ensemble des états invariants d'une C^* -algèbre (par l'action duale d'un groupe d' $\ast$ -automorphismes) est un simplexe. La réponse générale est négative mais une condition suffisante est que l'algèbre de von Neumann:

$$[P_g \pi_g(a) P_g]''$$

soit abélienne pour tout état invariant g . P_g désignant le projecteur sur les vecteurs invariants (dans l'espace d'Hilbert de la représentation G.N.S. de g) par l'action des unitaires qui implémentent le groupe dans cette représentation. π_g est la représentation G.N.S. associée à g et a désigne une C^* -algèbre avec identité.

Cette condition est connue sous le nom d'action G-abélienne de G sur a . [1]

Elle est équivalente à la condition suivante [2]:

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 = A_1^*, A_2 = A_2^*, \forall \rho \text{ état invariant}$$

$$\inf_{A_1} |\rho([A_1', A_2])| = 0, A_1' \in \text{conv} \{ \psi_x A_1 : x \in G \}$$

Le résultat suivant donne quelques conditions suffisantes pour que $\mathcal{A}$ soit G -abélienne et donc, l'ensemble $I_G(\mathcal{A})$ des états invariants de $\mathcal{A}$ soit un simplexe.

Proposition IV.1.1

Soient $\mathcal{A}, G, \psi$ comme auparavant. Si l'une des conditions qui suit est satisfaite, $\mathcal{A}$ est G -abélienne :

(1) $\mathcal{A}$ est abélienne.

(2) $\forall \rho \in I_G(\mathcal{A}), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 = A_1^*, A_2 = A_2^*$

$$\inf_{x \in G} |\rho([\psi_x A_1, A_2])| = 0$$

(3) G est localement compact, non compact et $\mathcal{A}$ est faiblement asymptotiquement abélienne, i.e.

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \forall \text{état } \sigma \text{ de } \mathcal{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\sigma([\psi_x A_1, A_2])| = 0$$

(4) $\mathcal{A}$ est asymptotiquement abélienne, i.e.

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|[\psi_x A_1, A_2]\| = 0$$

(5) $\mathcal{A}$ est quasi-locale (voir IV.2) et G le groupe des translations.

Démonstration se fait en combinant les résultats de [1], 2 et [3].

Remarquons que, d'après la condition (5) l'ensemble des états invariants par translation dans le cas du système quantique sur un réseau est toujours un simplexe.

1.2 Pour les systèmes quantiques infinis, la condition K.M.S. peut être interprétée comme la condition définissant l'équilibre [4], car un état stationnaire (invariant pour l'automorphisme temporel), stable pour les perturbations locales et ayant une décroissance des corrélations dans le temps souhaitable est K.M.S. (où alors le spectre de l'énergie dans la représentation de l'état est la semi-droite positive achevée).

Rappelons que l'on dit [11] que un état ω de $\mathcal{A}$ est K.M.S. par rapport au groupe d'automorphismes $A \in \mathcal{A} \mapsto \alpha_t(A) \in \mathcal{A}$ si

(1) $\omega(A \alpha_t(B))$ est une fonction continue de t ; $\forall A, B \in \mathcal{A}$

(2) $\int \omega(A \alpha_t(B)) f(t - i\beta) dt = \int \omega(\alpha_t(B) \cdot A) f(t) dt$, $f \in \mathcal{D}$

β est interprétée comme la température (inverse) du système, alors que $A \mapsto \alpha_t(A)$ décrit l'évolution dans le temps. Les états K.M.S. sont invariants par α_t .

Soit K_β l'ensemble des états K.M.S. pour une température donnée β . K_β n'est pas toujours compact pour la topologie faible, voir [5]. Cependant, une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$\| \alpha_t(A) - A \| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Dans ce cas K_p est un simplexe d'états localement normaux ([5]). Ceci est dû au fait que

$$\forall w \in K_p, \text{ le centre de } \pi_w(a)'' \text{ est fixe (ponctuellement).}$$

Il est clair que, vu ce qui précède, que l'ensemble des états d'équilibre (K.M.S.) à température fixe d'un système quantique sur un réseau est un simplexe.

De même, si G est un groupe possédant une représentation τ comme groupe d' $\ast$ -automorphismes de $\mathcal{A}$, et $I_G(\mathcal{A})$ désigne, comme auparavant, l'ensemble des états invariants par $\tau_g, g \in G$ alors :

$$I_G(\mathcal{A}) \cap K_p \text{ est un simplexe.}$$

1.3 Si $\mathcal{A}$ est engendrée par une famille dénombrable d'algèbres locales, chacune ayant un préduel séparable, alors K_p est métrisable.

Il est clair que cette condition est encore vérifiée dans le cas des systèmes quantiques sur un réseau.

1.4 Dans le cas de la Mécanique Statistique Classique, sur un réseau on peut adopter comme définition de l'équilibre les équations de Dobrushin-Lanford-Ruelle ([6],[7]).

On sait que, dans ce cas aussi, l'ensemble des états d'équilibre à température fixée est un simplexe.

1.5 Soit G un groupe possédant une représentation dans les $\ast$ -automorphismes de $\mathcal{A}$, comme précédemment, un état ρ est dit ergodique (par rapport à G), si

$$\rho \in \mathcal{E}(I_G(\mathcal{A}))$$

La théorie de Choquet assure l'existence d'une décomposition de chaque état de $I_G(\mathcal{A})$ en intégrale d'une mesure sur $I_G(\mathcal{A})$ à support dans la fermeture des états ergodiques (mesure maximale). Si $I_G(\mathcal{A})$ est métrisable, l'ensemble des états ergodiques est un ensemble qui porte cette mesure.

1.6 Supposons que K_β soit compact et $I_G(\mathcal{A})$ soit un simplexe. Alors, 5, on a le résultat suivant

Proposition IV.1.2 (Takesaki-Winnink)

Supposons $K_\beta \cap I_G(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Alors $K_\beta \cap I_G(\mathcal{A})$ est une face de $I_G(\mathcal{A})$ si et seulement si

$$\forall g \in K_\beta \cap I_G(\mathcal{A}) \quad \pi_g(\mathcal{A})' \cap U_g^{g'} \subset \pi_g(\mathcal{A})' \cap \pi_g(\mathcal{A})'$$

où $U_g^{g'}$ désigne le commutant du groupe d'unitaires qui implémente G dans $\pi_g(\mathcal{A})''$.

Remarquons que cette condition est vérifiée dans le cas des systèmes quantiques sur un réseau si $\beta \neq 0$ et l'interaction est un élément de l'ensemble $\mathcal{B}_1$ défini dans [8] ou dans IV.2 et $G = \mathbb{Z}'$.

On a encore un résultat sur la structure géométrique de K_β à l'aide de la

Proposition IV.1.3

Supposons que α est faiblement asymptotiquement abélien par rapport à $t \rightarrow \alpha_t$. Alors K_β est une face dans l'ensemble des états stationnaires ($w = w \circ \alpha_t$).

Démonstration : On utilise [9] et le résultat découle alors de la proposition III.1.9.

1.7 A partir de maintenant nous désignons par Δ l'ensemble des états d'équilibre à température fixe (par exemple K_β) en le supposant compact.

Supposons que un groupe G possède une représentation dans $\text{Aut}(\mathcal{A})$ dont l'action duale laisse globalement invariant Δ . Si G est localement compact moyennable, la représentation est continue et Δ possède des états G -invariants.

Il peut se produire que tous les états G -ergodiques soient aussi extrémaux dans l'ensemble des états invariants par les sous-groupes H de G . Dans ce cas on dit que la symétrie de G n'est pas brisée.

Si, au contraire, il existe un sous-groupe H de G tel que un état G -ergodique ρ n'est pas H -ergodique, on peut écrire

$$\rho = \int d\mu(w)$$

comme intégrale d'états H -ergodiques.

Dans ce cas, on dit qu'il y a une brisure spontanée de la symétrie relative à G .

Le théorème qui suit justifie l'emploi de la même expression dans le cas où Δ_G n'est pas une face de Δ .

Théorème IV.1.4

Supposons que Δ est un simplexe. Soit $\psi : G \rightarrow \text{Hom}(\Delta)$ une représentation continue de G dans les homéomorphismes affines de Δ .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) Δ_G est une face de Δ .
- (2) Pour tout sous-groupe H de G on a

$$\psi(\Delta_G) \subset \psi(\Delta_H)$$

- (3) Pour tout sous-groupe normal H de G on a

$$\psi(\Delta_G) \subset \psi(\Delta_H)$$

Démonstration : L'équivalence résulte du fait que une face de Δ est encore une face dans tout sous-convexe de Δ qui la contient et de la proposition III.1.9.

Nous dirons donc que la symétrie de G n'est pas brisée si une des conditions équivalentes du théorème précédent est vérifiée. Si H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G , on a

$$\Delta_{H_1 \vee H_2} = \Delta_{H_1 \cap H_2}$$

où $H_1 \vee H_2$ est le sous-groupe de G engendré par H_1 et H_2 , de telle sorte que la famille des sous-groupes de G dont l'ensemble des points fixes est une face de Δ (famille jamais vide) est filtrante et réticulée pour l'inclusion.

Soit $H(G)$ le sous-groupe de G maximal pour cette propriété ; c'est le plus grand sous-groupe de G tel que l'ensemble de ses points fixes est une face fermée de Δ .

Nous appellerons $H(G)$ le groupe de symétrie stable associé à G . L'intérêt de ce groupe est que la décomposition ergodique suivant $H(G)$ d'un état ρ de Δ_G coïncide avec la décomposition barycentrique de ρ dans Δ suivant la mesure maximale qui représente .

1.8 Dans [10] , D. Ruelle relie d'une façon rigoureuse et pour la première fois l'utilisation de "petits champs extérieurs" au problème de la brisure de symétrie.

Dans ce cas des systèmes classiques sur un réseau l'auteur introduit une classe d'interactions moyennables B^A qui lui permettent de séparer les états invariants des états non invariants si la symétrie est brisée.

Dans le cas des systèmes classiques sur un réseau les états d'équilibre sont les solutions des équations de Dobrushin-Lanford-Ruelle et le groupe G est le groupe des translations dans l'espace :

Par cohérence de notations, nous désignons encore par Δ l'ensemble des états d'équilibre relatifs à une interaction ϕ , invariante par translation, interaction fixée une fois pour toutes.

Δ_G désigne l'ensemble des états d'équilibre invariants par les translations du réseau.

Le théorème fondamental de [10] est le suivant :

Théorème

Soient ϕ , Δ et Δ_G comme ci-dessus. Les conditions suivantes sont équivalentes -

$$(1) \quad \Delta_G = \{\rho\} \quad \text{et} \quad \Delta_G \quad \text{est une face de} \quad \Delta \quad .$$

- (2) Pour tout $g \in \Delta_G$, tout $\sigma \in \Delta$ et tout $A = A' \in \mathcal{A}$
on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} |\Lambda(a)|^{-1} \sum_{x \in \Lambda(a)} [\sigma(\psi_x A) - g(A)]^2 = 0$$

uniformément par rapport à σ

- (3) Pour tout $\Psi \in \mathcal{B}^A$ la fonction $\lambda \mapsto P(\phi + \lambda \Psi)$
est dérivable pour $\lambda = 0$.

Dans l'énoncé $\Lambda(a)$, pour $a \in \mathbb{Z}^v$ avec $a = (a'_1, \dots, a'_v)$
désigne l'ensemble

$$\Lambda(a) = \{x \in \mathbb{Z}^v; x = (x'_1, \dots, x'_v) \text{ } 0 \leq x'_i \leq a'_i \text{ } i=1, \dots, v\}$$

et la $P(\cdot)$ la pression thermodynamique.

L'équivalence des deux premières conditions avec la troisième
utilise explicitement les équations d'équilibre

Le fait que l'auteur ne considère que le cas $\Delta_G = \{g\}$, car
tel est le cas dans le modèle d'Ising ferromagnétique lui impose
des conditions très fortes sur (2) et (3) ($\mu \neq 0$).

Dans le paragraphe suivant, nous donnons une version quantique
de ce théorème sans supposer l'existence d'un état covariant
unique.

La difficulté d'énoncer, dans ce cas, la condition (3) vient du
fait que l'on ne connaît pas, en général, la connexion entre les
états K.M.S. et les propriétés de la pression thermodynamique.

- REFERENCES IV.1 -

- [1] O. LANFORD III, D. RUELLE
Integral Representations of Invariant B^* -algebras
J. Math. Phys. 8, 1460-1463 (1967)
- [2] F. RIEZ, B. SZ-NAGY
Leçons d'analyse fonctionnelle.
- [3] E. STØRMER
Large Groups of Automorphisms of C^* -algebras.
Commun. Math. Phys. 5, 1-27 (1967)
- [4] R. HAAG, D. KASTLER, E. TRYCH-POHLMAYER
Stability and Equilibrium States
Preprint
- [5] M. TAKESAKI, M. WINNINK
Local Normality in Quantum Statistical Mechanics
Commun. Math. Phys. 30, 129-152 (1971)
- [6] R.L. DOBRUSHIN
The Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and Conditions of its Regularity.
Teor. Veroyatnost i Primenen. 13, (1968), 201-229
- [7] O. LANFORD III, D. RUELLE
Observables at Infinity and States with Short Range Correlations in Statistical Mechanics
Commun. Math. Phys. 13, 194-215 (1969)
- [8] D.W. ROBINSON
Statistical Mechanics of Quantum Spin Systems II
Commun. Math. Phys. 7, 337-348 (1968).
- [9] E. STØRMER
Commun. Math. Phys. 5, 1 (1967).
- [10] D. RUELLE
On the Use of "Small External Fields" in the Problem of Symmetry Breakdown in Statistical Mechanics
Ann. Physics, 69, 2 (1973).
- [11] M. SIRUGUE, M. WINNINK
Commun. Math. Phys. 19, 161 (1970).

SPONTANEOUS SYMMETRY BREAKDOWN
FOR QUANTUM LATTICE SYSTEMS

R. LIMA (x)

J. NAUDTS (xx)

ABSTRACT : For the case of quantum lattice systems we prove the equivalence of the spontaneous breaking of symmetry in the set of equilibrium states and the separability in mean energy of these states.

Mars 1974

74/P.604

Postal address : Centre de Physique Théorique, CNRS,
31, chemin J. Aiguier 13274 MARSEILLE CEDEX 2

(x) Attaché de Recherche au CNRS

(xx) Universiteit Leuven, Instituut voor theoretisch fysica,
Celestijnenlaan 200 D 3030 Heverlee, België

Introduction

If we consider the "geometric" properties of the set of equilibrium states (at given temperature) of the, say, Ising ferromagnetic model in an arbitrary magnetic field (see eq. [1]) we can see that translation invariant equilibrium states cannot be decomposed into convex combinations of non invariant equilibrium states (which exist at least for the three dimensional Ising model [2]).

This situation is from the geometrical point of view, an extreme case (which, for instance, cannot appear in a finite dimensional Choquet simplexes)

In the special case of the classical lattice system for the case when the set of translation invariant equilibrium states reduces to one point, the same problem was considered in [3], but using a different approach.

Acknowledgment : One of us (R.L.) is indebted to Professor Cerulus and Professor Verbeure for their kind hospitality at the University of Leuven.

The second author (J.N.) is indebted to Professor Kastler and Professor Visconti at the CNRS, Marseille.

In a previous paper [4], the authors consider the action of a locally compact group G as affine homeomorphisms of a Choquet simplex Δ . A theorem characterizes the case for which the fixed points of Δ form a face of Δ , and the characterization is a condition on all the points of Δ . Here, we give an application in the case when the simplex is the (compact metrizable convex) set of the K.M.S. states for a quantum lattice system at inverse temperature β (see [5]) and G is the discrete locally compact amenable group of the translations of the lattice.

Then, [6], consider a quantum lattice system on $\mathbb{Z}^{\nu}$. We associate with each lattice site $x \in \mathbb{Z}^{\nu}$ a Hilbert space $\mathcal{H}_x$ of dimension two, and with each finite region Λ in $\mathbb{Z}^{\nu}$ the tensor product

$$\mathcal{H}(\Lambda) = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$$

If $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ we can identify each bounded operator A on $\mathcal{H}(\Lambda_1)$ with $A \otimes 1_{\Lambda_2/\Lambda_1}$ on $\mathcal{H}(\Lambda_2)$, where $1_{\Lambda_2/\Lambda_1}$ is the identity of $\mathcal{H}(\Lambda_2/\Lambda_1)$. With this convention one defines the algebra of observables by the following

$$\mathcal{U} = \overline{\bigcup_{\Lambda \in \mathbb{Z}^{\nu}} \mathcal{U}(\Lambda)}^{|| \cdot ||}$$

where $\mathcal{U}(\Lambda)$ is the set of bounded operators on $\mathcal{H}(\Lambda)$.

We note that the group $\mathbb{Z}^{\nu}$ of space translations is a subgroup of the automorphism group of $\mathcal{U}$ and we denote the action of this group by

$$A \in \mathcal{U}(\Lambda) \longrightarrow \tau_z A \in \mathcal{U}(\Lambda+z) \quad , \quad z \in \mathbb{Z}^{\nu}$$

First we consider invariant interactions, i.e., functions $\bar{\Phi}$ from the set of finite subsets of $\mathbb{Z}'$ to $\mathcal{U}$ such that

- i) $\bar{\Phi}(X) \in \mathcal{U}(X)$, $\forall X \subset \mathbb{Z}'$, X , finite
- ii) $\bar{\Phi}(X)$ is hermitian,
- iii) $\bar{\Phi}(X+a) = \tau_a \bar{\Phi}(X)$, $\forall a \in \mathbb{Z}'$
- iv) $\|\bar{\Phi}\| = \sum_{X \ni 0} \frac{\|\bar{\Phi}(X)\|}{N(X)} < +\infty$

where the last sum extends over all finite subsets of $\mathbb{Z}'$ containing 0 and $N(X)$ is the number of points of X .

We denote by $\mathcal{B}$ the set of such interactions.

We consider a system of particles on the finite set Λ and the energy operator $H_\Lambda(\phi) \in \mathcal{U}(\Lambda)$ corresponding to the interaction $\bar{\Phi}$ is defined by

$$H_\Lambda(\phi) = \sum_{X \subset \Lambda} \bar{\Phi}(X)$$

$H_\Lambda(\phi)$ is an observable in the C^* -algebra $\mathcal{U}(\Lambda)$. The energy density of a state ω on $\mathcal{U}$ for the interaction $\bar{\Phi}$ is defined by :

$$\mathcal{E}_\phi(\omega) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Lambda)} \omega(H_\Lambda(\phi)) \quad (1.1)$$

whenever this limit exists when the finite subset Λ of $\mathbb{Z}'$ tends to infinity in the sense of van Hove. (See Appendix).

Further we recall that a mean on a group G is a state of the C^* -algebra of all bounded complex-valued functions on G equipped with the sup norm $\|f\|_\infty$. The existence of invariant means on G , (a mean on G is invariant if it is invariant by the bidual action of G) comes from the amenability of G (see [7]).

Let M be an invariant mean on G , then we say that M is extremal invariant iff M is an extremal point of the set of invariant means on G , i.e.

$$M = \lambda M_1 + (1-\lambda) M_2, M_1 \text{ and } M_2 \text{ invariant means} \Rightarrow M = M_1 = M_2$$

Recall, [6], that for a subset $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$

$$(\phi \in \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow \sum_{X \ni 0} \|\bar{\Phi}(X)\| e^{N(X)} < +\infty)$$

it is known that the equilibrium state satisfies K.M.S. boundary condition with respect to the one parameter group of automorphisms τ_t of $\mathcal{U}$, given by

$$\tau_t(A) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-it H_\lambda(\phi)} A e^{it H_\lambda(\phi)}, \quad t \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{U}$$

2. Uniformly averageable interactions

In this section we introduce interactions which are not invariant for translations.

An interaction Φ of the infinite lattice system is called uniformly finite range if there exists a finite subset Λ of $\mathbb{Z}'$ such that for any finite $X \subset \mathbb{Z}'$, $\Phi(X) \neq 0$ implies $X \subset \Lambda + x$ for some $x \in \mathbb{Z}'$.

Denote $\mathcal{H}_0$ the space of all interactions Φ which are uniformly finite range and for which

$$\|\Phi\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}'} \sum_{X \ni x} \frac{\|\Phi(X)\|}{N(X)} \quad (2.1)$$

is finite.

(2.1) is a norm on $\mathcal{H}_0$. The completion $\mathcal{H}$ of $\mathcal{H}_0$ for this norm is a Banach space of interactions. The space $\mathcal{B}$ of interactions defined in section 1 is the subspace of $\mathcal{H}$ containing the interactions which are invariant for translations.

For any $\Phi \in \mathcal{H}$, for any $x \in \mathbb{Z}'$ the energy in the point x is defined by

$$A_{\Phi}^x = \sum_{X \ni x} \frac{\Phi(X)}{N(X)} \quad (2.2)$$

On this way the energy per point is an observable in the C^* -algebra.

In the following we will have to take limits on increasing subsets of $\mathbb{Z}'$. Consider a sequence $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of finite subsets of $\mathbb{Z}'$ satisfying ;

for any $x \in \mathbb{Z}'$ the limit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x))}{N(\Lambda_n)}$ converges to zero. (2.3)

(Δ is the symmetric difference, $N(\Lambda)$ is the number of points in Λ)

Any time we write down $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}$ we mean $\lim_{N \rightarrow \infty}$ for any sequence $(\Lambda_n)_n$ satisfying (2.3) and the limit point is independent of this sequence.

Remark : This is equivalent with the limit in the sense of van Hove (see Appendix)

We introduce :

Definition 2.1: A bounded real function f on $\mathbb{Z}'$ is uniformly averageable if there exists a constant $m(f)$ such that the limit $m(f) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Lambda)} \sum_{x \in \Lambda} x f$ converges uniformly on $\mathbb{Z}'$.

($x f$ is the function on $\mathbb{Z}'$ defined by $x f(y) = f(y - x)$ for any $y \in \mathbb{Z}'$)

In particular $m(f)$ belongs to the closed convex hull of the set $\{x f, x \in \mathbb{Z}'\}$. Hence for any invariant mean M on $\mathbb{Z}'$ one has $M(f) = m(f)$.

Definition 2.2: An interaction $\Phi \in \mathcal{H}$ is uniformly averageable if for any finite subset Λ of $\mathbb{Z}'$ there exists a uniformly averageable function f^Λ on $\mathbb{Z}'$ such that

$$\Phi(X+x) = f^\Lambda(x) \tau_x \Phi(x) \quad \text{for any } x \in \mathbb{Z}'.$$

Denote $\mathcal{H}^A$ the class of uniformly averageable interactions.

Remark that $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}^A$. Further $\mathcal{H}^A$ is a Banach subspace of $\mathcal{H}$ because the set of uniformly averageable functions on $\mathbb{Z}'$ is uniformly closed.

Theorem 2.3: Let $\Phi \in \mathcal{H}^A$. Let ω be a translation invariant state on $\mathcal{H}$. Then the following holds :

- the function $x \in \mathbb{Z}' \rightarrow \omega(A_\Phi^x)$ is uniformly averageable.
- the limit $\mathcal{E}_\Phi(\omega)$ exist and

$$\mathcal{E}_\Phi(\omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \omega(A_\Phi^x)$$

Proof

a)

Remark that

$$A_{\Phi}^x = \sum_{X \ni x} \frac{\Phi(X)}{N(X)} = \sum_{X \ni 0} \frac{\Phi(X+x)}{N(X)} = \sum_{X \ni 0} \frac{f^x(X)}{N(X)} \tau_x \Phi(X)$$

Hence

$$\omega(A_{\Phi}^x) = \sum_{X \ni 0} \frac{f^x(X)}{N(X)} \omega(\Phi(X)) \quad (2.4)$$

Suppose first Φ is uniformly finite range. Then the function $x \in Z' \rightarrow \omega(A_{\Phi}^x)$ is a finite sum of uniformly averageable functions on Z' , hence itself is uniformly averageable. This proves a) in the case Φ is uniformly finite range.

Because the uniformly finite range interactions are dense in $\mathcal{A}^A$ and because the space uniformly averageable functions on Z' is closed a) follows for arbitrary $\Phi \in \mathcal{A}^A$

b)

Again it is enough to prove b) in the case Φ is uniformly finite range; i.e. : there exists a subset $\Lambda_0 \subset Z'$ such that $\Phi(X) \neq 0$ implies $X \subset \Lambda_0 + x$ for some $x \in Z'$. Let $\varepsilon > 0$. Let $\Lambda \subset Z'$.

Suppose $\frac{N(\Lambda \Delta (\Lambda+x))}{N(\Lambda)} < \varepsilon$ for any $x \in \Lambda_0$.

Then

$$\frac{1}{N(\Lambda)} \|H_{\Lambda}(\Phi) - \sum_{x \in \Lambda} A_{\Phi}^x\| \leq N(\Lambda_0) \varepsilon \|\Phi\| \quad (2.5)$$

$$\text{This shows } \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\Lambda)} \|H_{\Lambda}(\Phi) - \sum_{x \in \Lambda} A_{\Phi}^x\| = 0 \quad (2.6)$$

Hence b) follows from a).

3. States separated in mean.

Two translation invariant states on $\mathcal{U}$ can be separated by the energy density functional $\mathcal{E}_\Phi$ for some interaction Φ in $\mathcal{B}$. The aim of this section is to prove results of this kind for states which are not invariant for translations using the classes $\mathcal{A}^A$ and $\mathcal{A}$ of interactions.

The main result is the following :

Theorem 3.1 : Let ω_1 and ω_2 be states on $\mathcal{U}$. Let M be an extremally invariant mean on $\mathbb{Z}^\nu$. Are equivalent :

a) for any $A \in \mathcal{U}$.

$$M(x \in \mathbb{Z}^\nu \mapsto |\omega_1(\tau_x A) - \omega_2(\tau_x A)|^2) = 0 \quad (3.1)$$

b) (resp. c)) for any $\Phi \in \mathcal{A}^A$ (resp. $\Phi \in \mathcal{A}$) the following energy densities are equal :

$$M(x \in \mathbb{Z}^\nu \mapsto \omega_1(A_\Phi^x)) = M(x \in \mathbb{Z}^\nu \mapsto \omega_2(A_\Phi^x)) \quad (3.2)$$

Proof :

a) $\Rightarrow$ c)

Let $\Phi \in \mathcal{A}$, let Λ be a finite subset of $\mathbb{Z}^\nu$. Let $(u_{ij})_{i,j} \in \Lambda$ be matrix units for the C^* -algebra $\mathcal{U}(\Lambda)$. Define functions f_{ij} on $\mathbb{Z}^\nu$ by

$$\Phi(\Lambda+x) = \sum_{i,j} f_{ij}(x) \tau_x u_{ij} \quad \text{for any } x \in \mathbb{Z}^\nu$$

The functions f_{ij} are bounded by $\|\Phi\|$. Hence :

$$\begin{aligned} |M(x \mapsto (\omega_1 - \omega_2)(\Phi(\Lambda+x)))| &\leq \sum_{i,j} |M(x \mapsto f_{ij}(x) (\omega_1 - \omega_2)(\tau_x u_{ij}))| \leq \\ &\leq \|\Phi\| \sum_{i,j} M(x \mapsto |(\omega_1 - \omega_2)(\tau_x u_{ij})|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

which equals zero by condition a). Hence :

$$M(x \mapsto \omega_1(\phi(\Lambda+x))) = M(x \mapsto \omega_2(\phi(\Lambda+x))) \quad (3.3)$$

for any finite subset Λ of $\mathbb{Z}'$.

Suppose first Φ is uniformly finite range. There exists a finite subset Λ_0 of $\mathbb{Z}'$ such that $A_\phi^x = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leq x}} \phi(\lambda+x)$ for any $x \in \mathbb{Z}'$. Then (3.3) implies (3.2). Because the uniformly finite range interactions are dense in $\mathcal{H}$ (3.2) follows for arbitrary $\Phi \in \mathcal{H}$.

c) $\Rightarrow$ b) is trivial.

Essential in the proof of b) $\Rightarrow$ a) is the following

Lemma 3.2 : Let A be a self adjoint element of some local algebra $\mathcal{H}(\Lambda)$. Let f be a uniformly averageable function on $\mathbb{Z}'$. Let $y \in \mathbb{Z}' \setminus \Lambda$. There exists a $\phi \in \mathcal{H}^A$ such that

$$A_\phi^{x+y} = f(x) \tau_x A \quad (3.4)$$

for any $x \in \mathbb{Z}'$

Proof:

Define an interaction $\tilde{\Phi}$ by:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\Lambda+x) &= -N(\Lambda) f(x) \tau_x A & x \in \mathbb{Z}' & \quad (3.5) \\ \tilde{\Phi}(\Lambda \cup \{y\} + x) &= (N(\Lambda) + 1) f(x) \tau_x A & x \in \mathbb{Z}' & \\ \tilde{\Phi}(X) &= 0 & \text{otherwise.} & \end{aligned}$$

Then $\phi \in \mathcal{H}^A$ and ϕ satisfies (3.4)

Proof of b) $\Rightarrow$ a) in theorem 3.1 :

It is enough to prove (3.1) for any self-adjoint element A of any local algebra $\mathcal{A}(\Lambda)$

Let f be a uniformly averageable function on $\mathbb{Z}^{\nu}$. Take $\gamma \in \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda$.

Let Φ be the interaction constructed in lemma 3.2. Then condition b) of the theorem yields :

$$M(x \in \mathbb{Z}^{\nu} \rightarrow f(x) (\omega_1 - \omega_2) (A_{\Phi}^x)) = 0 \quad (3.6)$$

Denote $g(x) = (\omega_1 - \omega_2) (A_{\Phi}^x)$ for any $x \in \mathbb{Z}^{\nu}$. Then g is a bounded function on $\mathbb{Z}^{\nu}$. Let $z \in \mathbb{Z}^{\nu}$. Take $f = g - z g$. Then f is uniformly averageable.

By (3.6) one obtains $M((g - z g)g) = 0$. Or :

$$M(g, z g) = M(g^2) \quad \text{for any } z \in \mathbb{Z}^{\nu} \quad (3.7)$$

It has been proved in [4], that this implies $M(g^2) = M(g)^2$

But taking f constant in (3.6) there follows $M(g) = 0$. Hence

$M(g^2) = 0$. This exactly is equation (3.1).

Corollary 3.3 : Let ω and ρ be states on $\mathcal{A}$. Suppose ρ is invariant for translations. Let M be an extremally invariant mean on $\mathbb{Z}^{\nu}$. Are equivalent :

a) for any $A \in \mathcal{A}$

$$M(x \in \mathbb{Z}^{\nu} \rightarrow |\omega(\tau_x A) - \rho(A)|^2) = 0 \quad (3.8)$$

b) for any $\phi \in \mathcal{A}^A$

$$\varepsilon_{\phi}(\rho) = M(x \mapsto \omega(A_{\Phi}^x)) \quad (3.9)$$

Proof :

This follows from the theorems 2.3 and 3.1

4. Symmetry breakdown.

Let $\phi \in \mathcal{B}_1$. Let Δ be the simplex of K.M.S. -states for a one parameter group of automorphisms of $\mathcal{A}$. (See ex. [9]). Denote Δ_I the set of translation invariant states in Δ . Is it possible to decompose a state $\rho \in \Delta_I$ into two equilibrium states ρ_1, ρ_2 which are not invariant for translations : $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$? It is the general belief that this occurs if under influence of small perturbations the system can leave the state ρ and arrives in an equilibrium situation which is not invariant for translations of the system. Then one says that the translational symmetry is broken.

In the following theorem we support these ideas by showing the translational symmetry is broken if and only if there exists a perturbation $\phi \in \mathcal{A}$ which can change the energy density of the system.

Definition 4.1 : A convex subset F of Δ is a face of Δ if for any $\rho \in F$, $\omega_1, \omega_2 \in \Delta$, $\lambda \in]0, 1[$ such that $\rho = \lambda \omega_1 + (1-\lambda) \omega_2$ one has $\omega_1, \omega_2 \in F$. (see [8])

From above it is clear that the absence of spontaneous symmetry breakdown is equivalent to the fact that Δ_I is a face of Δ .

Theorem 4.2 : Let Δ, Δ_I be as above. Are equivalent :

- Δ_I is a face of Δ .
- for any state ω in Δ and for any extremally invariant mean M on $\mathbb{Z}'$ there exists a state $\rho \in \Delta_I$ for which

$$M(x \mapsto |\omega(\tau_x A) - \rho(A)|^2) = 0, \forall A \in \mathcal{A} \quad (4.1)$$

c) for any state ω in Δ and for any invariant mean M on Z' there exists a state $\rho \in \Delta_I$ such that for any interaction $\phi \in \mathcal{H}^A$ following energy densities are equal :

$$\varepsilon_\phi(\rho) = M(x \in Z' \mapsto \omega(A_\phi^x)) \quad (4.2)$$

Proof:

Let M be an invariant mean on Z' . The state ρ in conditions b) and c) is uniquely determined by : $\rho(A) = M(x \mapsto \omega(\tau_x A))$ for any $A \in \mathcal{U}$. Equation (4.1) now can be reformulated :

$$M(x \mapsto |\omega(\tau_x A)|^2) = |M(x \mapsto \omega(\tau_x A))|^2 \quad (4.3)$$

for any $A \in \mathcal{U}$.

The equivalence of a) and b) now follows from [4], theorem 4.2. The equivalence of b) and c) follows from corollary 3.3. Remark that equation (4.2) is affine in the mean M so that it holds for any invariant mean if it holds for any extremally invariant mean.

Appendix

In section 2 we defined explicitly a finite subset of $\mathbb{Z}^v$ tends to infinity. In fact this is a current way of defining $\Lambda \rightarrow \infty$ in the theory of amenable groups. Strongly related with this is the limit of Λ tending to infinity in the sense of van Hove. (See e.g. [9], p.13) :

Let $a \in \mathbb{Z}^v$. Suppose the coordinates $a_1, \dots, a_v$ of a are strictly positive. Denote $\Lambda(a)$ the cube : $\Lambda(a) = \{x \in \mathbb{Z}^v \mid 0 \leq x_i < a_i, i=1, \dots, v\}$. For any $n \in \mathbb{Z}^v$ denote $n \cdot a$ the vector in $\mathbb{Z}^v$ with coordinates

$$n_i a_i, \quad i=1, \dots, v$$

Let Λ be a finite subset of $\mathbb{Z}^v$. Denote $N_a^-(\Lambda)$ the number of points $n \in \mathbb{Z}^v$ for which the cube $\Lambda(a) + n \cdot a$ is contained in Λ . Denote $N_a^+(\Lambda)$ the minimal number of points $n \in \mathbb{Z}^v$ needed to cover Λ with the union of the $\Lambda(a) + n \cdot a$.

Definition 1 : The sets Λ_n tend to infinity in the sense of van Hove if $\lim_{n \rightarrow \infty} N_a^-(\Lambda_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} N_a^-(\Lambda_n) / N_a^+(\Lambda_n) = 1$ for any $a \in \mathbb{Z}^v$.

Proposition 2 : Let $(\Lambda_n)_n$ be a sequence of finite subsets of $\mathbb{Z}^v$. Are equivalent : a) the Λ_n converge to ∞ in the sense of van Hove

b) for any $x \in \mathbb{Z}^v$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x))}{N(\Lambda_n)} = 0$$

Proof

a) $\Rightarrow$ b)

Let $x \in \mathbb{Z}^v$. Define $a \in \mathbb{Z}^v$ by $a_i = \max \{1, |x_i|\}$, $i=1, 2, \dots, v$.

Denote N_+ the covering of Λ_n with cubes $\Lambda(a) + n \cdot a$, N_- the union of cubes $\Lambda(a) + n \cdot a$ contained in Λ_n . Then

$$\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x) \subset (N_+ \cup \tau_x N_+) \setminus (N_- \cap \tau_x N_-)$$

and the number of points contained

in the last set is smaller than $2 N(\Lambda_2) (N_2^+(\Lambda_n) - N_2^-(\Lambda_n))$

We have :

$$\frac{N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x))}{N(\Lambda_n)} \leq 2 N(\Lambda_2) \frac{N_2^+(\Lambda_n) - N_2^-(\Lambda_n)}{N_2^-(\Lambda_n)}$$

which converges to zero if $n \rightarrow \infty$. This proves b).

b) $\Rightarrow$ a)

Let $a \in \mathbb{Z}^v$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, v$. Let $\varepsilon > 0$

For n sufficiently large one has $\frac{N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x))}{N(\Lambda_n)} \leq \varepsilon$ for any $x \in \Lambda_2$.

Denote $M = \bigcap_{x \in \Lambda_2} (\Lambda_n + x)$. Then $N(\Lambda_n) - N(M) \leq \sum_{x \in \Lambda_2} N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x)) \leq \varepsilon N(\Lambda_n) N(\Lambda_2)$

Denote $P = \bigcup_{x \in \Lambda_2} (\Lambda_n + x)$. Then $N(P) - N(\Lambda_n) \leq \sum_{x \in \Lambda_2} N(\Lambda_n \Delta (\Lambda_n + x)) \leq \varepsilon N(\Lambda_n) N(\Lambda_2)$

Now $N(\Lambda) N_2^-(\Lambda_n) \geq N(M)$ and $N(\Lambda_2) N_2^+(\Lambda_n) \leq N(P)$

Hence $N_2^+(\Lambda_n) - N_2^-(\Lambda_n) \leq 2 \varepsilon N_2^+(\Lambda_n) N(\Lambda_2)$

or $1 - \frac{N_2^-(\Lambda_n)}{N_2^+(\Lambda_n)} \leq 2 \varepsilon N(\Lambda_2)$

Because $\varepsilon > 0$ is arbitrary $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_2^-(\Lambda_n)}{N_2^+(\Lambda_n)} = 1$. Remark that

this automatically implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_2^-(\Lambda_n) = +\infty$$

REFERENCES

- [1]. C.M.Fortuin, P.W.Kasteleyn, J.Ginibre, Comm. Math.Phys. 22 (1971) 89-103
- [2] R.L.Dobrushin, Theory of Prob. and its Appl. 10 , 193 (1965) and idem , 13, 197 (1968)
- [3] D. Ruelle, Ann. of Phys. 69 , 364 (1972)
- [4] R.Lima, J.Naudts, Invariant Faces of a Simplex, Prep. 559 Marseille , feb. 1974
- [5] M.Winnink, M.Takesaki, Commun. Math Phys. 30, 129-152 (1973)
- [6] O.E.Lanford III, D.W.Robinson, Commun. Math Phys. 9, 327-338 (1968)
- [7] F.P.Greenleaf, Invariant Means on Topological Groups,v. Nostrand, 1969
- [8] E.M.Alfsen, Compact Convex Sets and Boundary integrals, Springer-Verlag, Berlin (1971)
- [9] D.Ruelle, Statistical Mechanics, W.A.Benjamin, inc., (1969)

PARTIE V

UNE BORNE DE LA COMPRESSIBILITE

Existence of a lower bound of the compressibility in quantum lattice gases

by

R. LIMA (*) and S. MIRACLE-SOLE (**)

Centre de Physique Théorique. C. N. R. S., 31, chemin J.-Aiguier,
13274 Marseille, Cedex-2 (France)

ABSTRACT. — The existence of a positive lower bound of the compressibility is proved in the case of general quantum lattice systems at high temperature.

1. The compressibility has been shown to be strictly positive for certain classical [1] [4] and quantum systems [2] of interacting particles in equilibrium. This implies that the pressure is a continuous function of the density, as it is expected in an empirical basis. In the general case of quantum lattice systems the continuity of the pressure has been proved in [3]. By an argument based on the Tomita-Takesaki Theory of K. M. S. states, but the possibility of the existence of points of vanishing compressibility has not been ruled out by this method. Here we will also be concerned with general lattice systems, but our argument will follow as in [2] a method inspired from the classical case. With it we are able to find a positive lower bound on the compressibility. However the application of the method appears to be restricted to interactions verifying the condition $\|\Phi\|_\alpha < 1$ which will be introduced in the following. We can say, because the temperature appears as a multiplicative constant $\frac{1}{kT} \Phi$, that the result remains valid only at high temperature (Although in a large range that the one in which

(*) Attaché de Recherches. Centre de Physique Théorique. Marseille.

(**) Maître de Recherches. Centre de Physique Théorique. Marseille.

the analyticity of the pressure has been proved). In order to get a result valid for every T , some new techniques, restricted to less general systems, as the Wiener integral, have to be introduced (see [2]).

2. Let Λ be a finite subset of a v -dimensional lattice $\mathbb{Z}^v$ and denote by $|\Lambda|$ the number of points of Λ .

The Hilbert space $\mathcal{H}_\Lambda$ of the states of the system inside the region Λ is a $2^{|\Lambda|}$ -dimensional Hilbert space. We choose in $\mathcal{H}_\Lambda$ an orthonormal basis whose elements $|X\rangle$ are indexed by the subsets of Λ . If $X \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2$ we identify the element $|X\rangle$ of $\mathcal{H}_{\Lambda_1}$ and $\mathcal{H}_{\Lambda_2}$ and we get $\mathcal{H}_{\Lambda_1} \subset \mathcal{H}_{\Lambda_2}$. A number operator $N = N^*$ is defined through $N|X\rangle = |X| |X\rangle$.

The interaction potential $\Phi(\cdot)$ is a function applying every finite subset $X \neq \emptyset$ of $\mathbb{Z}^v$ into a self-adjoint operator in $\mathcal{H}_X$. Then the Hamiltonian of the system in Λ is the following operator

$$H_\Lambda = H_\Lambda^* = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(X)$$

Q being an operator on $\mathcal{H}_\Lambda$ the equilibrium expectation value of Q is given by

$$\langle Q \rangle = \text{Tr} (e^{-H_1} Q) \cdot \text{Tr} (e^{-H_1})^{-1}$$

We assume that the interaction $\Phi(X)$ for all $X \subset \Lambda$ commutes with the number operator N , and that it verifies

$$\|\Phi\|_\alpha = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\substack{X \in \mathcal{X} \\ |X|=n}} \|\Phi(X)\| e^{\alpha(n-1)} < +\infty,$$

for some $\alpha > 0$.

THEOREM. — Suppose that $\|\Phi\|_\alpha < 1$, $\alpha > 0$, then the following inequality is verified

$$\frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{\langle N \rangle} \geq \frac{\rho}{\rho + A}$$

where A is a certain positive constant independent of Λ and $\rho = \frac{\langle N \rangle}{|\Lambda|}$ the density.

Remark. — The right hand side of the inequality is the expression of the compressibility for the system in a region Λ , or in more precise terms, the compressibility χ is as follows:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}, \quad \beta^{-1} \frac{d\rho}{dP} = \frac{(N - \langle N \rangle)^2}{\langle N \rangle}$$

Since A is independent of Λ , a rigorous lower bound on the compressibility follows from the theorem.

In order to prove the theorem we will adapt some methods used in the classical case.

First we introduce the creation and annihilation operators by means of

$$\begin{aligned} a^*(x)|X\rangle &= 0 & a(x)|X\rangle &= |X/\{x\}\rangle \quad \text{if } x \in X \\ a^*(x)|X\rangle &= |X \cup \{x\}\rangle & a(x)|X\rangle &= 0 \quad \text{if } x \notin X \end{aligned}$$

the number operator can then be written as

$$N = \sum_{x \in \Lambda} a^*(x)a(x)$$

We introduce also an auxiliary operator R by

$$R = R^* = e^{\frac{1}{2}H} \left(\sum_{x \in \Lambda} a(x)e^{-H}a^*(x) \right) e^{\frac{1}{2}H}$$

for which the following lemma can be proved.

LEMMA. — If $|\langle R^2 - NR \rangle| \leq A|\Lambda|$ then,

$$\frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{\langle N \rangle} \geq \frac{\rho}{\rho + A}$$

Proof of the lemma. — The lemma follows from the Schwartz inequality in the form

$$|\langle (N - \langle N \rangle)(N - R) \rangle|^2 \leq \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle \langle (N - R)^2 \rangle$$

It suffices to verify the following expressions

$$\begin{aligned} \langle R \rangle &= \langle N \rangle \geq 0 \\ \langle NR \rangle &= \langle RN \rangle = \langle N(N - 1) \rangle \end{aligned}$$

since then

$$\begin{aligned} \langle (N - \langle N \rangle)(N - R) \rangle &= \langle N \rangle \\ \langle (N - R)^2 \rangle &= \langle N \rangle + \langle R^2 - NR \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

and finally

$$\frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{\langle N \rangle} \geq \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle + \langle R^2 - NR \rangle} \geq \frac{\rho}{\rho + A}$$

Proof of the theorem. — Using this lemma, in order to prove the theorem, it suffices to prove that

$$|\langle R^2 - NR \rangle| \leq A|\Lambda|$$

where by computation

$$\langle R^2 - NR \rangle = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} \langle [e^{-\frac{1}{2}H}a^*(x)e^{\frac{1}{2}H}, e^{\frac{1}{2}H}a(y)e^{-\frac{1}{2}H}]e^{-\frac{1}{2}H}a^*(y)a(x)e^{\frac{1}{2}H} \rangle$$

We use the formulae

$$e^{-\frac{1}{2}H} Q e^{\frac{1}{2}H} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n n!} [H, Q]^{(n)}$$

where

$$[H, Q]^{(0)} = Q, \quad [H, Q]^{(n)} = [H, [H, Q]^{(n-1)}]$$

and therefore

$$[H, Q]^{(n)} = \sum_{X_1 \in \Lambda} \dots \sum_{X_n \in \Lambda} [\Phi(X_n), [\dots, [\Phi(X_1), Q] \dots]] \quad (1)$$

We write

$$\sum_{X_i} = \sum_{K_i=0}^{\infty} \sum_{X_i, |X_i|=K_i+1}$$

and we remark that we may restrict the summations in (1) by the conditions (defining also S_i):

$$\begin{aligned} X_i \cap S_i &\neq \emptyset \\ S_i &= \Lambda_i \quad \text{if } Q \text{ is an operator on } \mathcal{H}_{\Lambda_i} \\ S_{i+1} &= X_i \cup S_i \end{aligned}$$

Notice that S_i contains at most $|\Lambda_i| + K_1 + \dots + K_{i-1}$ elements, therefore

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \| [H, Q]^{(n)} \| \\ &\leq \frac{2^n \| Q \|}{n!} \sum_{K_1 \dots K_n} \prod_{i=1}^n \left((N(\Lambda_i) + K_1 + \dots + K_{i-1}) \sup_x \sum_{\substack{X_i \in x \\ |X_i|=K_i+1}} \| \Phi(X_i) \| \right) \\ &\leq 2^n \| Q \| \sum_{K_1 \dots K_n} \exp(|\Lambda_i| + K_1 + \dots + K_n) \prod_{i=1}^n \sup_x \sum_{\substack{X_i \in x \\ |X_i|=K_i+1}} \| \Phi(X_i) \| \\ &\leq \| Q \| e^{|\Lambda_1|} (2 \| \Phi \|_a)^n \end{aligned}$$

with

$$\| \Phi \|_a = \sum_{K=1}^{\infty} \sup_x \sum_{\substack{X \in x \\ |X|=K}} \| \Phi(X) \| e^{K-1}$$

Let us suppose $\| \Phi \| < 1$, then

$$\| e^{-\frac{1}{2}H} a^*(y) a(x) e^{\frac{1}{2}H} \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| a^*(y) a(x) \| e^2 \| \Phi \|_a^n = \frac{e^2}{1 - \| \Phi \|_a}$$

On the other hand, if we develop both terms in the commutator $[e^{-\frac{1}{2}H}a^*(x)e^{\frac{1}{2}H}, e^{\frac{1}{2}H}a(y)e^{-\frac{1}{2}H}]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{K_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{X_1 \subset \Lambda \\ |X_1|=K_1+1}} \dots \sum_{K_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{X_n \subset \Lambda \\ |X_n|=K_n+1}} \sum_{K'_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{Y_1 \subset \Lambda \\ |Y_1|=K'_1+1}} \dots \sum_{K'_m=0}^{\infty} \sum_{\substack{Y_m \subset \Lambda \\ |Y_m|=K'_m+1}} \\ [[\Phi(X_1), \dots [\Phi(X_n), a^*(x)], \dots], [\Phi(Y_1), \dots [\Phi(Y_m), a(y)], \dots]]$$

We may restrict the summations by

$$\begin{aligned} X_i \cap S_i &\neq \emptyset, & S_1 &= \{x\}, & S_{i+1} &= X_i \cup S_i \\ Y_i \cap S'_i &\neq \emptyset, & S'_1 &= \{y\}, & S'_{i+1} &= Y_i \cup S'_i \\ S_{n+1} \cap S'_{m+1} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

We see that there are in each term at most $(1 + K_1 + \dots + K_n)$ possibilities for points x to give non zero terms, coupled to $(1 + K'_1 + \dots + K'_m)$ possibilities for y . But we have also

$$\frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n (1 + K_1 + \dots + K_{i-1})(1 + K_1 + \dots + K_n) \leq e \prod_{i=1}^n e^{K_i}$$

and we can similarly bound, provided that $\|\Phi\|_a < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} \| [e^{-\frac{1}{2}H}a^*(x)e^{\frac{1}{2}H}, e^{\frac{1}{2}H}a(y)e^{-\frac{1}{2}H}] \| \\ \leq \sum_{x \in \Lambda} \frac{e^2}{(1 - \|\Phi\|_a)^2} = |\Lambda| \frac{e^2}{(1 - \|\Phi\|_a)^2} \end{aligned}$$

We conclude then at the inequality required in the hypothesis of the lemma with

$$A = \frac{e^4}{(1 - \|\Phi\|_a)^3}$$

and the theorem is proved.

ACKNOWLEDGEMENT

It is a pleasure to acknowledge helpful discussions we had with J. GINIBRE and D. W. ROBINSON. In particular, we are indebted to J. GINIBRE for a useful suggestion concerning the extension of the results to a more general class of potentials ($\alpha \neq 1$).

REFERENCES

- [1] D. RUELLE, *Statistical Mechanics*, Ch. 3.4 Benjamin, New York, 1969.
- [2] J. GINIBRE, *Phys. Rev. Letters*, t. **24**, 1970, p. 1473.
- [3] R. B. GRIFFITHS and D. RUELLE, *Commun. Math. Phys.*, t. **23**, 1971, p. 169.
- [4] L. A. PASTUR, *T. M. P.*, t. **14**, 1973, p. 211.

(Manuscrit révisé reçu le 18 décembre 1973).

